**Załącznik C**

**(materiały pomocnicze 3)**

**Przekształć i zwyciężaj** (ang. *transform-and-conquer*)

Technika przekształć i zwyciężaj to podejście do rozwiązywania problemu algorytmicznego, które składa się z dwóch etapów: najpierw problem jest przekształcany na inny (np. przez zmianę reprezentacji danych wejściowych), równoważny mu, który
z jakiegoś powodu daje większe nadzieje na jego rozwiązanie; drugi etap to właśnie znajdowanie rozwiązania drugiego problemu, które jest jednocześnie rozwiązaniem pierwotnego problemu.

**Przykład 1** (Anagramy)

*Słowa tuba i buta czy atol i lato są anagramami, tzn. składają się z tych samych liter.
Znajdź anagramy wśród słów:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| abo |  aft |  akr |  akt |  alb |  ale |  ano |  bal |  boa |  dal |  dla |  fag |  gaf |  kat |  kra |  ona |  rak |  taf |  Tak |

a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.

b) W I etapie dokonaj zmiany reprezentacji (sposobu przedstawienia) danych wejściowych.

***Rozwiązanie:***

Sposób postępowania (algorytm) jest następujący:

* Dodajemy każdemu ze słów „sygnaturę”, która ma postać uporządkowanego jak w alfabecie ciągu liter tworzących słowo (to etap zmiany reprezentacji).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| abo | aft | akr | akt | alb | ale | ano | bal | boa | dal | dla | fag | gaf | kat | kra | ona | rak | taf | tak |
| *abo* | *aft* | *akr* | *akt* | *abl* | *ael* | *ano* | *abl* | *abo* | *adl* | *adl* | *afg* | *afg* | *akt* | *akr* | *ano* | *akr* | *aft* | *akt* |

* Następnie porządkujemy w porządku alfabetycznym „sygnatury”
i uzyskujemy rozwiązanie zadania – anagramy znajdują się obok siebie.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| alb | bal | abo | boa | dal | dla |  ale | fag |  gaf |  aft |  taf | akr | kra | rak | akt |  kat | tak | ano | Ona |
| *abl* | *abl* | *abo* | *abo* | *adl* | *adl* | *ael* | *afg* | *afg* | *aft* | *aft* | *akr* | *akr* | *akr* | *akt* | *akt* | *akt* | *ano* | *Ano* |

Projekt algorytmu to przykład zastosowania techniki typu przekształć
i zwyciężaj. Zastosowana została zmiana reprezentacji, tj. sposób przedstawienia danych wejściowych, poprzez uporządkowanie liter.

Należy podkreślić, że w przypadku większej liczby danych wejściowych trzeba by posłużyć się efektywnym algorytmem porządkowania.

**Zadanie 1** (Układ nierówności)

*Zastąp litery liczbami 2, 3, 1, 5, 8, 6, 11, 13, 10,*

*a < b > c < d < e > f < g < h > i*,

*tak, aby nierówności a < b, b > c, c < d* itd.były *prawdziwe:*

*Wskazówka:
Dla liczb 2, 5, 1 i 0 i układu nierówności a < b > c < d rozwiązaniem jest np. 0 < 5 > 1 < 2, gdyż 0 < 5*,  *5 > 1* i *1 < 2.*

a) Przeanalizuj dokładnie wskazówkę.

b) Zastosuj algorytm wykorzystujący m.in. technikę typu przekształć i zwyciężaj.

**Przykład 2** (Koperty)

*Masz tysiąc banknotów o nominale 1$. Jak rozmieścić banknoty w 10 kopertach, aby przy pomocy pewnej kombinacji tych kopert dało się uzyskać każdą kwotę między 1$ i 1000$?*

a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.

b) Zauważ, że 210>1000. Jak rozwiązać zadanie, stosując własności numeracji dwójkowej?

***Rozwiązanie:***

Do zmiany reprezentacji (sposobu przedstawiania) danych wejściowych wykorzystamy reprezentację binarną liczb, a dalej skorzystamy z tego, że 9 bitów wystarczy do zapisania każdej liczby mniejszej niż 29 = 512.

Oznacza to, że do dziewięciu kopert powinniśmy włożyć kolejno: 1$, 2$, 4$, 8$, …, 256 $. Do dziesiątej wkładamy resztę banknotów, tj. w sumie 489$ (=1000 – 511).

Każdą liczbę nie większą niż 488 można zapisać jako sumę potęg liczby 2, co daje rozwiązanie (wykorzystamy co najwyżej dziewięć kopert).

Co z liczbami pomiędzy 489 a 1000? Można je zapisać jako sumę 489 i sumę potęg liczby 2, więc mamy rozwiązanie (wszystkie 10 kopert wykorzystamy tylko do zapisu liczby 1000).

a) W jaki sposób została zastosowana technika typu przekształć i zwyciężaj.

b) Dla jakich kwot pieniędzy rozwiązań łamigłówki jest więcej?

**Zadanie 2** (Odważniki)

*Zaprojektuj zestaw takich dziesięciu odważników do wagi szalkowej, który pozwoli na wyznaczenie ciężaru jak największej liczby ważonych przedmiotów z dokładnością do 1 kg.*

*Zakładamy, że odważniki można kłaść tylko na jednej szalce wagi.*

**Przykład 3** (Ciasto)

*Jaka jest największa liczba kawałków, na jakie można podzielić prostokątne ciasto, przecinając je 11 razy? Każda z linii cięcia ma być równoległa do jednego z boków trójkąta?*

a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.

b) Jak przeformułować zadanie na zadanie optymalizacyjne dla funkcji kwadratowej?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez h liczbę cięć poziomych, a przez v liczbę cięć pionowych.
Jakim wyrażeniem opiszemy całkowitą liczbę uzyskanych kawałków?
To (h + 1)(v + 1).

Ponieważ h + v = 11, więc pierwotny problem sprowadza się do wyznaczenia największej możliwej wartości iloczynu (h + 1) (11 – h + 1) = h (11 – h) + 12, gdzie h < 12.

Można w prosty sposób pokazać (jak?), że zadanie optymalizacyjne ma dwa rozwiązania (5, 6) oraz (6, 5). Dla pierwotnego problemu oznacza to, że rozwiązaniem jest liczba 30.

**Zadanie 3** (Tramwaj)

*Ania, Bartek, Darek, Hania, Krzyś, Robert, Sonia i Tomek dojeżdżają do szkoły tramwajami tej samej linii (niekoniecznie jadąc w tym samym kierunku). Wsiadają na przystankach: 4, 2, 4, 3, 12, 11, 11 i 10 (licząc dla tramwaju jadącego w tym samym kierunku). Okazuje się, że przystanek najbliższy szkole znajduje się w takim miejscu, że średnia długość ich podróży (mierzona przez liczbę przystanków) jest najmniejsza z możliwych. Który to przystanek?*

a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.

b) Jak przeformułować zadanie na zadanie dotyczącej statystyki?