SCENARIUSZ TEMATYCZNY

OPRACOWANY W RAMACH PROJEKTU:
INFORMATYKA – MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA.
PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI
Z ELEMENTAMI PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Autorzy scenariusza:

Iwona i Ireneusz Bujnowscy

TEMAT LEKCJI:

Schemat Hornera – dzielenie wielomianów – rozwiązywanie przy pomocy komputera. Pierwiastki wielomianu. (Poziom podstawowy i rozszerzony)

Streszczenie

Dla informatyków **Schemat Hornera** to sposób obliczania wartości wielomianu dla danej wartości argumentu wykorzystujący minimalną liczbę mnożeń, jest to również **algorytm dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian (x-a).**
Na lekcjach dotyczących tego tematu powtórzymy twierdzenia związane z wielomianami;

- Twierdzenie o dzieleniu wielomianów z resztą
- Pierwiastek wielomianu
- Twierdzenie Bezoute'a o podzielności wielomianu W(x) przez dwumian (x-a):
- Twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian (x-a):
- Twierdzenie o krotności pierwiastka wielomianu

Poznamy algorytm schematu Hornera dzielenie wielomianu przez dwumian, oraz rozwiążemy przy pomocy arkusza kalkulacyjnego – problem znalezienia współczynników wielomianu n-tego stopnia mając dane n- pierwiastków tego wielomianu.

Czas realizacji:

2 x 45min

Podstawa programowa

3.4 PR MATEMATYKA –uczeń stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian (x-a)

3.5 PR MATEMATYKA - uczeń stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

6.1 INFORMATYKA- wykorzystywanie komputera oraz programów edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin.
Uczeń:
1) wykorzystuje oprogramowanie dydaktyczne i technologie informacyjno komunikacyjne w pracy twórczej i przy rozwiązywania zadań i problemów szkolnych;

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

IV Użycie i tworzenie strategii - Uczeń tworzy strategie rozwiązania problemu (matematyka).
III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego (informatyka):

- wykorzystanie komputera do rozwiązywania równań liniowych
- umiejętność logicznego myślenia i argumentowania;
- rozwijanie nawyku krytycznej analizy informacji;
- umiejętność formułowania hipotez i ich uzasadniania;
- umiejętność planowania strategii rozwiązania problemu;

Cel

Poznanie schematu Hornera; zastosowanie schematu do zadań z wielomianów; wypracowanie algorytmu „odwrotnego" do schematu Hornera.

Słowa kluczowe

Schemat Hornera, wielomian, pierwiastek wielomianu, twierdzenie Bezoute'a, dzielenie wielomianów, adresowanie mieszane;

Co przygotować?

Prezentacja - Schemat Hornera.pptx; arkusz kalkulacyjny: horner.xls

Przebieg zajęć

Wprowadzenie: Przy dzieleniu dwóch liczb np. 7 przez 3 możemy zapisać:
7:3=2 reszta 1 czyli 7/3=2+1/3 wygodniejszy bez ułamków jest zapis 7=2*3+1
Tak samo będziemy postępować z dzieleniem wielomianu przez wielomian.

$W(x)/P(x) = Q(x) + R(x)/P(x)$ lub równorzędny zapis $W(x) = Q(x)P(x) + R(x)$

stopień $W(x) = n$, stopień $P(x) = m$, stopień $Q(x) = k$, stopień $R(x) = s$;
gdzie $m \leq n$; $k = n - m$; $0 \leq s < m$

Twierdzenie. O dzieleniu wielomianów z resztą

Jeśli W(*x*) oraz P(*x*) są wielomianami i P(*x*) nie jest wielomianem zerowym, to istnieją takie dwa wielomiany Q(*x*) oraz R(*x*), że:

$$W(x) = Q(x)P(x) + R(x),$$

gdzie stopień wielomianu *R(x)* jest mniejszy od stopnia wielomianu *P(x)*. Jeżeli wielomian *W(x)* jest podzielny przez wielomian *P(x)* bez reszty to *R(x)* jest wielomianem zerowym (tzn. *R(x)=0*).

Aby zobaczyć jak znajdować pierwiastki wielomianu warto obejrzeć film na youtube.com:
http://www.youtube.com/watch?v=kvFFlzQlm0Q

Twierdzenie. O krotności pierwiastka wielomianu***:***
Liczba a jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu *P(x)* wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian *P(x)* jest podzielny przez, $(x-a)^k$ a nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$

Twierdzenie. O związku stopnia wielomianu z liczbą jego pierwiastków:
Każdy niezerowy wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Twierdzenie Bezoute'a. O podzielności wielomianu *W(x)* przez dwumian *(x-a)*:
Wielomian *W(x)* jest podzielny przez *(x-a)* wtedy i tylko wtedy gdy *W(a)=0*
Szkic dowodu:

$$W(x) = Q_1(x) * (x-a) + \text{reszta}$$

(reszta jest wielomianem stopnia zerowego bo dzieliliśmy przez dwumian (x-a), który jest wielomianem stopnia pierwszego)

$$W(a) = Q_1(x) * (a-a) + \text{reszta}$$
$$W(a) = Q_1(x) * 0 + \text{reszta}$$
$$W(a) = \text{reszta} = R(x) = 0$$

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu *W(x)*
⇔wielomian *W(x)* dzieli się bez reszty przez dwumian *(x-a)*
⇔ *W(a)=0*
⇔reszta =0

Twierdzenie. O reszcie z dzielenia wielomianu *W(x)* przez dwumian *(x-a)*:
Reszta r z dzielenia Wielomianu *W(x)* przez dwumian *(x-a)* jest równa *r=W(a)*.
Twierdzenie to pozwala obliczyć resztę z dzielenia wielomianu *W(x)* przez dwumian *(x-a)* bez wykonywania dzielenia, na przykład:
reszta z dzielenia wielomianu *W(x)* przez *(x+1)* wynosi *W-(1)* a przez *(x-2)* wynosi *W(2)*

Schemat Hornera

Dzielenie wielomianu *W(x)* przez dwumian *(x-a)*
Niech $W(x)=a_nx^n+ a_{n-1}x^{n-1}+\dots a_1x+a_0$

Wtedy $W(x)=(b_m x^m+ b_{m-1}x^{m-1}+\ldots b_1 x+b_0)(x-a)+R$ gdzie $m=n-1$

Współczynniki $b_m \ldots b_0$ znajdziemy posługując się pewnym algorytmem w tablicy (tabeli)

	X^n	X^{n-1}	…	X	
pierwiastek	a_n	a_{n-1}	….	a_1	a_0
a	b_m	b_{m-1}			R

$b_m= a_n$
$b_{m-1}= a*b_m+ a_{n-1}$
$b_{m-2}= a*b_{m-1}+ a_{n-2}$
…….
$R=a*b_0+a_0$

Przykład:
Podzielić wielomian $W(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$ przez $(x-3)$

	X^4	X^3	X^2	X	
pierwiastek	1	-2	-7	8	12
3	1	1	-4	-4	R=0

W pierwszym białym wierszu wpisujemy współczynniki z wielomianu W(x) w drugim wierszu w pierwszej kolumnie wpisujemy pierwiastek dwumianu (x-3) czyli 3. Następnie postępujemy zgodnie z powyższą instrukcją (algorytmem), czyli:
$b_3=1$ została liczba przepisana z góry
$b_2=3*1+(-2)=1$
$b_1=3*1+(-7)=-4$
$b_0=3*(-4)+8=-4$
$R=3*(-4)+12=0$
Reszta =0 czyli 3 jest pierwiastkiem wielomianu $R(x)$

	X^4	X^3	X^2	X	
pierwiastek	1	-2	-7	8	12
3	1	1	-4	-4	0

„Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego"

Odczytujemy współczynniki (kolorowe: 1 1 -4 -4) wielomianu $Q(x)= x^3+x^2-4x-4$ który jest wynikiem
dzielenia $W(x)$ przez $(x-3)$
$W(x)=Q(x)(x-a)$
Czyli $x^4-2x^3-7x^2+8x+12 =(x^3+x^2-4x-4)(x-3)$

Ćwiczenie1:
ten sam wielomian $W(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$

a) podzielić przez $(x+1)$
b) podzielić przez $(x-2)$
c) podzielić przez $(x+2)$

Ćwiczenie2:
Schematem Hornera podzielić (kaskadowo) wielomian $W(x)=x^4-4x^3-7x^2+5x-2$ przez dwumiany:
$(x-1);(x-2);(x-1)$

	1	-4	5	-2
1	1	-3	2	0
2	1	-1	0	
1	1	0		

➔ otrzymaliśmy wielomian: x^2-3x+2
➔ otrzymaliśmy wielomian: $x-1$
➔ otrzymaliśmy wielomian: 1

Jeżeli zmienimy kolejność dwumianów, przez które dzielimy nasz wielomian $W(x)$, otrzymamy

	1	-4	5	-2
2	1	-2	1	0
1	1	-1	0	
1	1	0		

➔ otrzymaliśmy wielomian: x^2-2x+1
➔ otrzymaliśmy wielomian: $x-1$
➔ otrzymaliśmy wielomian: 1

lub

	1	-4	5	-2
1	1	-3	2	0
1	1	-2	0	
2	1	0		

➔ otrzymaliśmy wielomian: x^2-3x+2
➔ otrzymaliśmy wielomian: $x-2$
➔ otrzymaliśmy wielomian: 1

Wnioski:
-kolejność przez jakie dzielimy dwumiany jest nie istotna (czyli kolejność wypisywania pierwiastków jest dowolna)
-zawsze ostatni wielomian jest stopnia zerowego:1 (ostatni wiersz 1 0)

Możemy zatem spróbować stworzyć w arkuszu kalkulacyjnym „program”, który będzie dzielił dowolny wielomian (ustalonego stopnia) przez dwumiany zgodnie ze schematem Hornera.

Wielomian $W(x)= x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x-12$ (dla ułatwienia $a_n=1$ w naszym przypadku $a_5=1$)
Pierwiastki dane wielomianu *W(x) to:-2;-1;1;-3;2*
Schematem Hornera będziemy dzielić wielomian *W(x)* przez dwumiany *(x+2), (x+1), (x-1), (x+3), (x-2)*.

Zakres czynności przy tworzeniu arkusza:

- Do komórek od A2 do A6 wpisujemy pierwiastki: -2;-1; 1;-3; 2
- Do komórek od B1 do G1 wpisujemy współczynniki wielomianu *W(x)*: 1; 3; -5;-15; 4; 12
- W kolumnie B powielamy wartość z B1 czyli 1 (tyle wierszy ile mamy danych pierwiastków)
- Do komórki C2 wpisujemy formułę: =$A2*B2+C1 (gdzie $A2 jest adresem mieszanym, który zawsze przy kopiowaniu będzie brał wartość z komórki leżącej na przecięciu kolumny A i aktualnego wiersza).
- Następnie kopiujemy formułę z komórki C2 w dół wzdłuż kolumny C (tyle wierszy, ile mamy danych pierwiastków)
- Bierzemy w blok komórki od C2 do C6 (5 komórek bo 5 pierwiastków) i kopiujemy je wzdłuż kolejnych kolumn (tyle ile jest współczynników w wielomianie W(x) w naszym przypadku do kolumny G)

Arkusz z formułami oraz z obliczonymi współczynnikami poniżej:

	1	3	-5	-15	4	12
-2	1	=$A2*B2+C1	=$A2*C2+D1	=$A2*D2+E1	=$A2*E2+F1	=$A2*F2+G1
-1	1	=$A3*B3+C2	=$A3*C3+D2	=$A3*D3+E2	=$A3*E3+F2	=$A3*F3+G2
1	1	=$A4*B4+C3	=$A4*C4+D3	=$A4*D4+E3	=$A4*E4+F3	=$A4*F4+G3
-3	1	=$A5*B5+C4	=$A5*C5+D4	=$A5*D5+E4	=$A5*E5+F4	=$A5*F5+G4
2	1	=$A6*B6+C5	=$A6*C6+D5	=$A6*D6+E5	=$A6*E6+F5	=$A6*F6+G5

	1	3	-5	-15	4	12
-2	1	1	-7	-1	6	0
-1	1	0	-7	6	0	0
1	1	1	-6	0	0	0
-3	1	-2	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0

Otrzymaliśmy nadmiarowe komórki z zerami (można je później wykasować)

Ćwiczenie 3: podzielić wielomian $W(x) = 2x^5 - 3x^3 - x^2 - 80x - 156$ przez dwumian *(x - 3)* , sprawdzić jakie mogą być jeszcze pierwiastki całkowite (wymierne) tego wielomianu

Uwaga: jeżeli brak współczynnika przy x^4 -> wpisujemy do tabeli zero;

Wynik z tabeli: ->2 6 15 44 52 reszta = 0;

Sprawdzenie wiedzy po 1 jednostce lekcyjnej-> zadania ze Zbioru zadań z matematyki, Klasa 2, temat: *Dzielenie wielomianu* (wykonać za pomocą schematu Hornera).

Odwróćmy teraz problem: mamy n pierwiastków (dla ułatwienia - całkowitych) wielomianu ntego stopnia i chcemy otrzymać *n+1* współczynników wielomianu *W(x)* gdzie $a_n=1$
Będziemy budować arkusz, który poprzednio stworzyliśmy (od tyłu) (lustrzane odbicie tego, co zrobiliśmy wcześniej).

2	1	0	0	0	0	0
-3	1	-2	0	0	0	0
1	1	1	-6	0	0	0
-1	1	0	-7	6	0	0
-2	1	1	-7	-1	6	0
	1	**3**	**-5**	**-15**	**4**	**12**
	1	**3**	**-5**	**-15**	**4**	**12**
-2	1	1	-7	-1	6	0
-1	1	0	-7	6	0	0
1	1	1	-6	0	0	0
-3	1	-2	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0

Zgodnie z wnioskami, które zapisaliśmy wyżej, w pierwszej kolumnie A wypisujemy pierwiastki (kolejność dowolna), a następnie pierwszy wiersz to 1;0; 0… (n –zer). W komórce C2 trzeba wymyślić wzór na odwrócenia poprzedniej sytuacji (trzeba dać się wykazać uczniom) będzie to formuła: =C1-$A1*B1. Następnie powielamy formułę w dół w kolumnie C a następnie zaznaczony blok wzdłuż kolumn D-G.

(Efekt – jasno-czerwona tabela)

2	1	0	0	0	0	0
-3	1	=C1-$A1*B1	=D1-$A1*C1	=E1-$A1*D1	=F1-$A1*E1	=G1-$A1*F1
1	1	=C2-$A2*B2	=D2-$A2*C2	=E2-$A2*D2	=F2-$A2*E2	=G2-$A2*F2
-1	1	=C3-$A3*B3	=D3-$A3*C3	=E3-$A3*D3	=F3-$A3*E3	=G3-$A3*F3
-2	1	=C4-$A4*B4	=D4-$A4*C4	=E4-$A4*D4	=F4-$A4*E4	=G4-$A4*F4
	1	**=C5-$A5*B5**	**=D5-$A5*C5**	**=E5-$A5*D5**	**=F5-$A5*E5**	**=G5-$A5*F5**
	1	**3**	**-5**	**-15**	**4**	**12**
-2	1	=$A9*B9+C8	=$A9*C9+D8	=$A9*D9+E8	=$A9*E9+F8	=$A9*F9+G8
-1	1	=$A10*B10+C9	=$A10*C10+D9	=$A10*D10+E9	=$A10*E10+F9	=$A10*F10+G9
1	1	=$A11*B11+C10	=$A11*C11+D10	=$A11*D11+E10	=$A11*E11+F10	=$A11*F11+G10
-3	1	=$A12*B12+C11	=$A12*C12+D11	=$A12*D12+E11	=$A12*E12+F11	=$A12*F12+G11
2	1	=$A13*B13+C12	=$A13*C13+D12	=$A13*D13+E12	=$A13*E13+F12	=$A13*F13+G12

Dla klas informatycznych doskonałym zadaniem jest napisanie programu w języku C++ dla wyżej wymienionego problemu.

ZADANIE PRW*: *Pierwiastki wielomianu
Limit pamięci: 32 MB

Mając dane n pierwiastków wielomianu n-tego stopnia, gdzie $a_n=1$ należy podać $n+1$ współczynników tegoż wielomianu.

Np. dla danych: 2, -2, 1
Wynikiem będzie: 1 1 -4 -4
Ponieważ $(x - 2)(x + 2)(x - 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Wejście

W pierwszym wierszu wejścia znajduje jedna liczba całkowita dodatnia n (1<n<50) oznaczająca liczbę pierwiastków.
W drugim wierszu n –liczb całkowitych maksymalnie dwucyfrowych oddzielonych pojedynczą spacją

Wyjście

Twój program powinien wypisać n+1 liczb całkowitych oddzielonych spacją, oznaczające współczynniki wielomianu.

Przykład

Dla danych wejściowych:

5
1 1 -1 -1 3

wynikiem jest:

1 -3 -2 6 1 -3

Przykładowe rozwiązanie w C++

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main()
{
        int n,a;
        cin>>n;
        int t1[n+1],t2[n+2];
        for(int i=0;i<=n;i++) {t1[i]=0;t2[i]=0;}
        cin>>a;
```

„Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego”

```
        t1[0]=1;
        t1[1]=-a;
        for(int i=1;i<n;i++)
        {
                cin>>a;
                a=-a;
                for(int j=1;j<=i+1;j++)
                {
                        t2[j]=(t1[j-1]*a+t1[j]);
                }
                for(int j=1;j<=i+1;j++) t1[j]=t2[j];

        }

        for(int i=0;i<=n;i++) cout<<t1[i]<<" ";
        return 0;
}
```

Praca w zespołach –maksymalnie dwu-osobowych przy każdym komputerze (15-20 minut)

Zadania dla 2-osobowych zespołów:

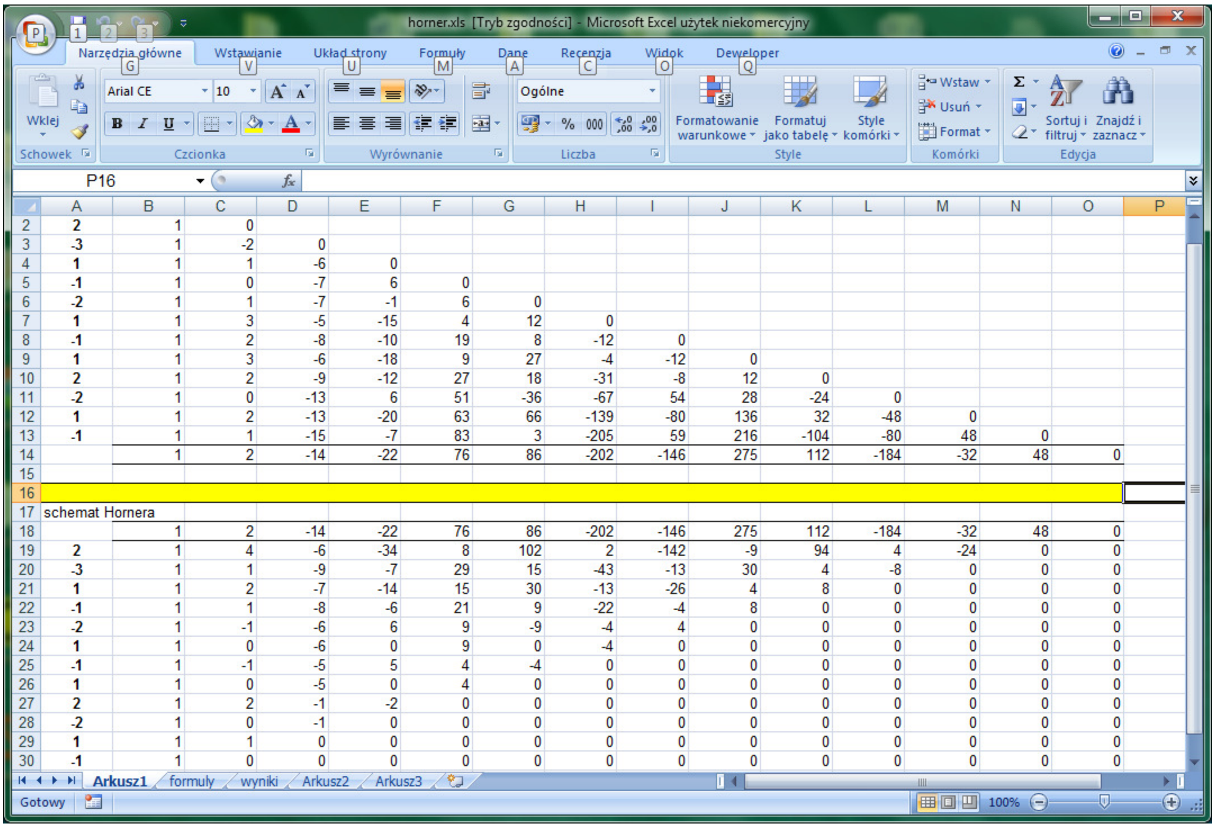
Napisać program w języku C++ lub utworzyć arkusz kalkulacyjny rozwiązujący powyższy problem zadania PRW-pierwiastki wielomianu, a następnie uzupełnić tabelę.

Uzupełnić w tabeli kolumnę wynik (czyli współczynniki wielomianu *W(x)* mając dane pierwiastki w kolumnie dane (w pierwszym wierszu danych liczba pierwiastków, w drugim wierszu pierwiastki oddzielone spacją).

dane	Wynik
10 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	**1 -10 49 -120 210 -252 210 -120 45 -10 1**
4 3 -5 1 2	**1 -1 -19 49 -30**
6 1 1 1 2 3 4	**1 -12 56 -130 159 -98 24**
12 2 -3 1 -1 -2 1 -1 1 2 -2 1 -1	**1 2 -14 -22 76 86 -202 -146 275 112 -184 -32 48**
12 -1 -2 3 -1 -2 1 -1 1 2 1 1 -3	**1 1 -18 -16 110 78 -304 -148 417 121 -278 -36 72**

Przykładowy arkusz poniżej
horner.xslx

„Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego”



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	2	1	0													
3	-3	1	-2	0												
4	1	1	1	-6	0											
5	-1	1	0	-7	6	0										
6	-2	1	1	-7	-1	6	0									
7	1	1	3	-5	-15	4	12	0								
8	-1	1	2	-8	-10	19	8	-12	0							
9	1	1	3	-6	-18	9	27	-4	-12	0						
10	2	1	2	-9	-12	27	18	-31	-8	12	0					
11	-2	1	0	-13	6	51	-36	-67	54	28	-24	0				
12	1	1	2	-13	-20	63	66	-139	-80	136	32	-48	0			
13	-1	1	1	-15	-7	83	3	-205	59	216	-104	-80	48	0		
14		1	2	-14	-22	76	86	-202	-146	275	112	-184	-32	48	0	
15																
16																
17	schemat Hornera															
18		1	2	-14	-22	76	86	-202	-146	275	112	-184	-32	48	0	
19	2	1	4	-6	-34	8	102	2	-142	-9	94	4	-24	0	0	
20	-3	1	1	-9	-7	29	15	-43	-13	30	4	-8	0	0	0	
21	1	1	2	-7	-14	15	30	-13	-26	4	8	0	0	0	0	
22	-1	1	1	-8	-6	21	9	-22	-4	8	0	0	0	0	0	
23	-2	1	-1	-6	6	9	-9	-4	4	0	0	0	0	0	0	
24	1	1	0	-6	0	9	0	-4	0	0	0	0	0	0	0	
25	-1	1	-1	-5	5	4	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	
26	1	1	0	-5	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27	2	1	2	-1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28	-2	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
30	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Panel ekspertów (5 minut)

Jakie były problemy przy tworzeniu arkusza (programu)?

Dyskusja podsumowująca (5-10 minut)

Wnioski: schemat Hornera - szybszy niż tradycyjne dzielenie, można go również stosować gdy współczynniki wielomianu są parametrami.

Ocenianie

Ocena wykonanych arkuszy w MS Excel lub programów w języku C++

Dostępne pliki

Schemat Hornera.pptx, arkusze w pliku horner.xls