KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

SCENARIUSZ LEKCJI

OPRACOWANY W RAMACH PROJEKTU:
INFORMATYKA – MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA.
PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI
Z ELEMENTAMI PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Autorzy scenariusza:

mgr Włodarczyk Mariusz, mgr Jerzy Sobol

TEMAT LEKCJI: **Zastosowanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych z wykorzystaniem programu GEOGEBRA (dla uczniów uzdolnionych matematycznie)**

Streszczenie

Zadanie optymalizacyjne to takie, którego treścią jest poszukiwanie minimalnej lub maksymalnej wartości funkcji celu (która w praktyce jest prawie zawsze funkcja wyrażająca koszt produkcji lub zysk w danym przedsięwzięciu) przy narzuconych warunkach i ograniczeniach dotyczących na przykład dostępności surowców, wielkości produkcji itp.

Problem optymalizacji można przedstawić na lekcjach matematyki przy okazji realizacji tematów związanych z nierównościami i układami nierówności stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Czas realizacji

2 x 45 minut

Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

Cele kształcenia –wymagania ogólne:

Informatyka

I. Wyszukiwanie, gromadzenie i przetwarzanie informacji z rożnych źródeł opracowywanie za pomocą komputera: rysunków, tekstów, danych liczbowych, motywów, animacji, prezentacji multimedialnych.

II. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.

III. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z rożnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań

IV. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

„Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego”

V. Modelowanie matematyczne

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

Informatyka
Uczeń:
-gromadzi w tabeli dane pochodzące np. z Internetu,
-dobiera odpowiednie wykresy do zaprezentowania danych;
-wykorzystuje oprogramowanie dydaktyczne i technologie informacyjno-komunikacyjne w pracy twórczej i przy rozwiązywaniu zadań.

Matematyka
Uczeń:
- rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru,
- ilustruje w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne opisuje podana nierówność,
- wyznacza punkty przecięcia wykresów funkcji liniowych rozwiązując odpowiednie układy równań,
- potrafi zbudować wyrażenie, które będzie podlegać optymalizacji.

Podstawa programowa

Nierówności i układy nierówności stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

Uczeń interpretuje graficznie zbiór rozwiązań układu nierówności, w którym proste są zapisane w postaci ogólnej, rozwiązuje zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania układów nierówności z dwiema niewiadomymi

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

Uczeń stosuje poznaną wiedzę z informatyki na lekcjach matematyki do rozwiązywania problemów z życia codziennego za pomocą programowania liniowego.

Cel

Zastosowanie programu GeoGebra do rozwiązywania zadań dotyczących programowania liniowego.

Słowa kluczowe

Nierówności liniowe, układy nierówności liniowych, punkt przecięcia prostych, programowanie liniowe,

Co przygotować?

Powtórzyć z uczniami wiadomości dotyczące graficznego rozwiązywania nierówności stopnia pierwszego oraz rozwiązywania układów równań liniowych stopnia pierwszego. Wiadomości

„Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego”

teoretyczne oprogramowaniu liniowym: Józef Janikowski „Elementy algebry liniowej" str. 84-95.
Zainstalować oprogramowanie GeoGebra na komputerach w pracowni informatycznej.

Przebieg zajęć:

1. Wprowadzenie

Jeśli funkcja celu jest funkcją liniową, zaś warunki i ograniczenia mają postać równań i nierówności liniowych, zadanie optymalizacyjne nosi nazwę **zadania programowania liniowego.**

Rozwiązywanie zadań programowania liniowego składa się z etapów:

Budowa modelu zadania:
- określenie zmiennych zadania,
- określenie ograniczeń i warunków w postaci równań i/lub nierówności liniowych,
- wyznaczenie liniowej funkcji celu podlegającej minimalizacji lub maksymalizacji.

Rozwiązanie zadania:
- graficzne rozwiązanie układu nierówności liniowych opisujących warunki zadania (określenie podzbioru punktów płaszczyzny opisanych tym układem),
- sporządzenie wykresu funkcji celu (lub kilku wykresów tej funkcji),
- odczytanie, dla jakich wartości zmiennych decyzyjnych funkcja celu przyjmuje najmniejszą lub największą (w zależności od treści zadania) wartość,
- podanie tej optymalnej wartości funkcji celu.

Najważniejszym elementem rozwiązania problemu jest zbudowanie modelu matematycznego. Wymaga to określenia zmiennych, wyszukania w treści i odpowiedniego powiązania ze sobą właściwych danych podczas określania warunków brzegowych zagadnienia, zbudowanie funkcji celu oraz zdecydowanie, czy funkcja celu ma podlegać minimalizacji czy maksymalizacji.

Przykład:
PROBLEM 1[(1)]

Mały zakład krawiecki szyje koszule męskie i bluzki damskie. Wykonanie koszuli męskiej zajmuje krawcowi 3 godziny, zaś wykonanie bluzki damskiej 2 godziny. Koszt uszycia bluzki damskiej wynosi 30 zł, a koszuli męskiej 40 zł. Zakład chce wyprodukować w ciągu tygodnia koszule i bluzki za łączną kwotę nie przekraczająca 580 zł. Swoje wyroby właściciel zakładu będzie sprzedawał z zyskiem, który w przypadku koszuli wynosi 25 zł, zaś w przypadku bluzki 18 zł. Ile koszul męskich, a ile bluzek damskich powinien wyprodukować w tygodniu ten zakład jeśli pracuje przez 5 dni w po 8 godzin dziennie, aby osiągnąć największy zysk. Jaki to będzie zysk ?

ROZWIĄZANIE:

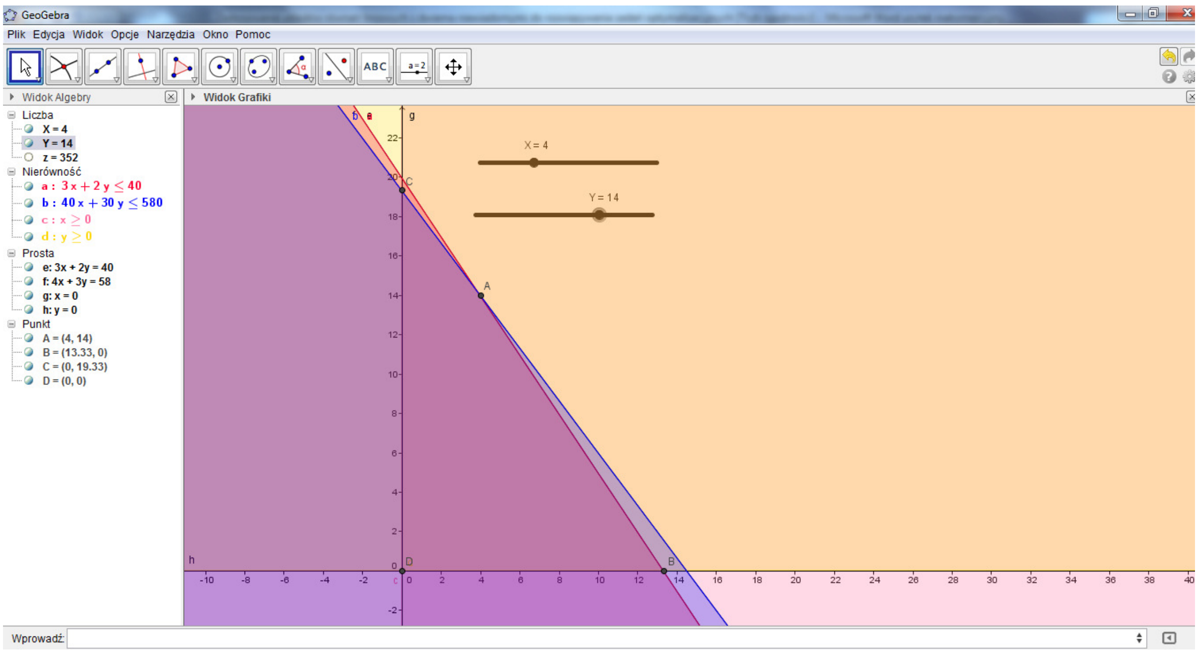
Oznaczmy: x – liczba koszul męskich $x \in N$
y – liczba bluzek damskich $y \in N$
z – zysk firmy ze sprzedaży koszul i bluzek

Określamy warunki w postaci układu nierówności liniowych:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 40 \\ 40x + 30y \leq 580 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy liniową funkcję celu podlegającej maksymalizacji:

$$z = 25x + 18y$$



Graficzne rozwiązujemy układ nierówności liniowych opisujących warunki zadania (określamy podzbiór punktów płaszczyzny opisanych tym układem).

Odp. Zakład powinien produkować 4 koszule męskie i 14 bluzek damskich. Tygodniowy zysk będzie wynosił 352 zł.

PROBLEM 2(1)

W turnieju wiedzy o malarstwie są do wyboru pytania typu A i typu B. Oznaczmy przez *x* - liczbę wybranych pytań typu A, a przez *y* - liczbę pytań typu B. Obowiązują następujące reguły:

- trzeba wybrać co najmniej 3 pytania typu A i 2 pytania typu B;
- liczba wybranych pytań typu B nie może przekroczyć podwojonej liczby pytań typu A
- łącznie można wybrać maksymalnie 15 pytań;
- za prawidłową odpowiedź na pytanie typu A otrzymuje się 4 punkty, a za prawidłową odpowiedź na pytanie typu B – 5 punktów. Ile maksymalnie punktów można uzyskać? Ile pytań każdego typy trzeba wybrać, aby mieć możliwość uzyskania maksymalnej liczby punktów?

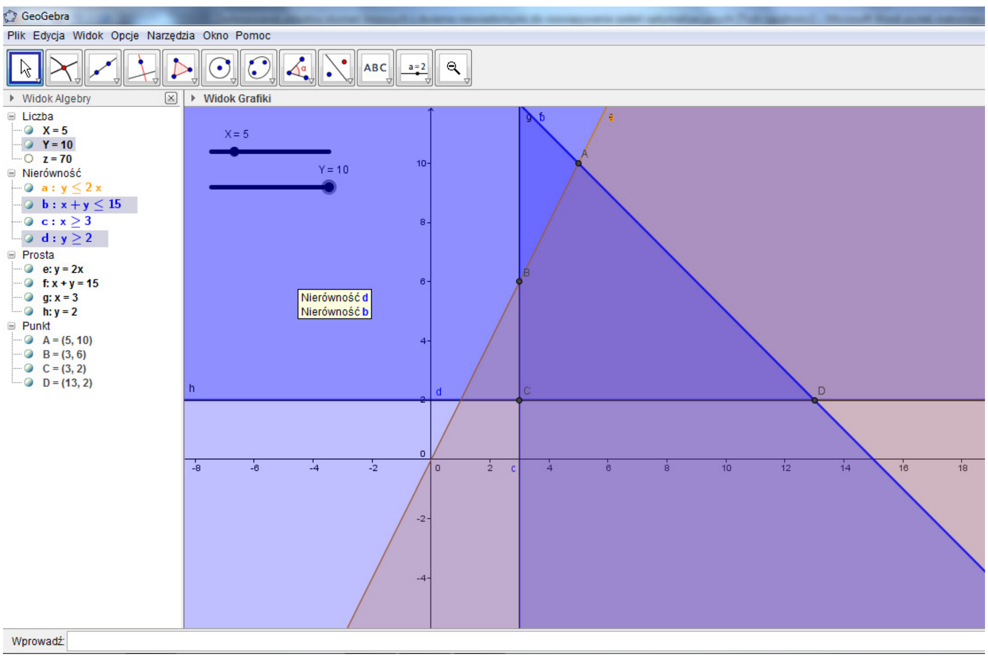
ROZWIĄZANIE:

$$\begin{cases} y \le 2x \\ x + y \le 15 \\ x \ge 3 \\ y \ge 2 \end{cases}$$

Oznaczmy: *z* - maksymalna możliwa do uzyskania liczba punktów

z=4x+5y

Aby suma *4x+5y* była największa, to punkt o współrzędnych (*x;y*) jest jednym z wierzchołków otrzymanego wielokąta.



Wprowadzając suwaki w programie GeoGebra można płynnie obliczyć wartość funkcji celu w wierzchołkach czworokąta.

$(3;2)\quad 4x+5y=22$
$(3;6)\quad 4x+5y=42$
$(5;10)\quad 4x+5y=70$
$(13;2)\quad 4x+5y=62$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie *4x+5y* osiąga wartość największą gdy *x=5* i *y=10.*

Odp. Należy wybrać 5 pytań typu A i 10 pytań typu B. Możliwą maksymalną ilością uzyskanych punktów jest 70.

2. Praca w zespołach (30 minut)

PROBLEM 3(2)

Rząd biednego kraju chce określić podstawowy posiłek dla mieszkańców złożony z ryżu i ziaren soi, tani i jednocześnie spełniający wymagania dotyczące wartości odżywczej, zawartości protein i witaminy B2.

Wiadomo, że:
Jednostka objętościowa ryżu kosztuje 70 centów, dostarcza około 3360 kJ energii, zawiera 15 g protein i 0,1 mg witaminy B2. Dla jednostki objętościowej ziaren soi odpowiednie dane są następujące: 50 centów, 1120 kJ energii, 20 g protein i 0,3 mg witaminy B2. Dorosły człowiek potrzebuje dziennie 6720 kJ energii, 90 g protein i 0,9 mg witaminy B2.
Pomóż rządowi tego kraju zdecydować, jaki ma być skład posiłku.

ROZWIĄZANIE:

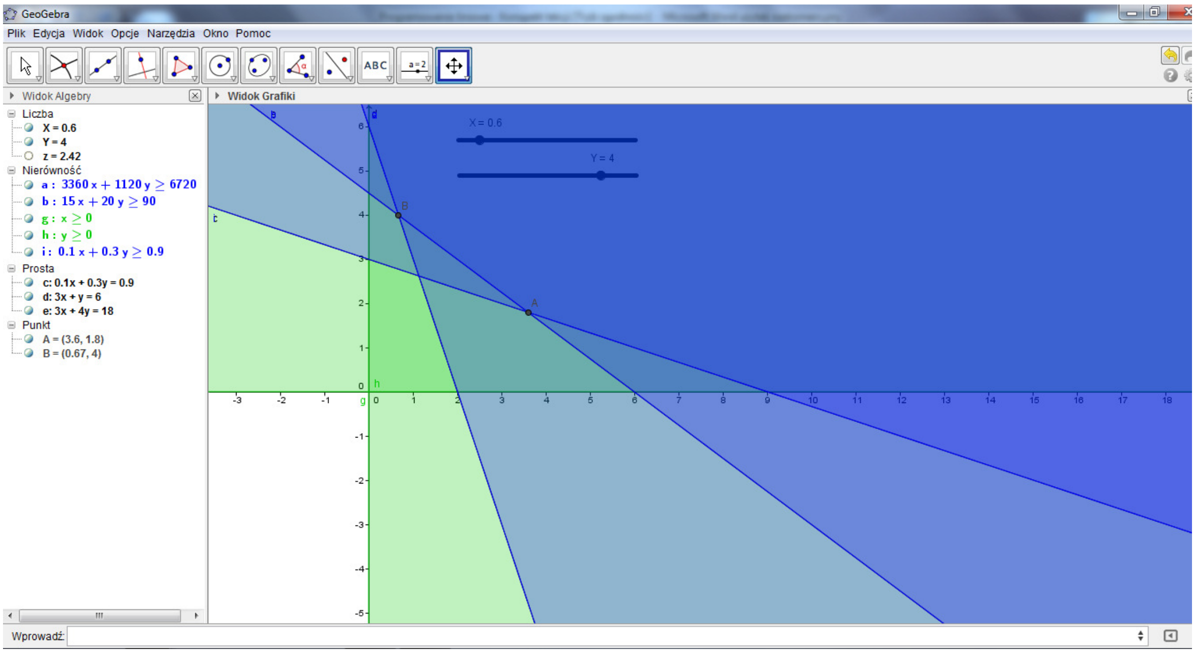
Oznaczmy: x – liczba jednostek objętościowych ryżu $x \in N$
y – liczba jednostek objętościowych ziaren soi $y \in N$
z – cena podstawowego posiłku

Określamy warunki w postaci układu nierówności liniowych:

$$\begin{cases} 3360x + 1120y \geq 6720 \\ 15x + 20y \geq 90 \\ 0,1x + 0,3y \geq 0,9 \end{cases}$$

Wyznaczamy liniową funkcję celu podlegającej minimalizacji:

$$z = 0,7x + 0,5y$$



Odp. Posiłek powinien składać się $\frac{2}{3}$ jednostek objętościowych ziaren i 4 jednostek objętościowych ziaren soi. Koszt takiego posiłku wynosi 2,47 $.

PROBLEM 4(2)

W dziale kontroli technicznej pewnej firmy zatrudnieni są kontrolerzy z uprawnieniami pierwszej i drugiej kategorii. Firma jest w stanie zatrudnić najwyżej 8 kontrolerów z uprawnieniami pierwszej kategorii i najwyżej 10 kontrolerów z uprawnieniami drugiej kategorii.
W ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy należy dokonać kontroli co najmniej 1800 wyrobów wyprodukowanych w firmie w ciągu dnia. Kontroler z uprawnieniami pierwszej kategorii sprawdza w ciągu godziny 25 wyrobów, przy czym nie popełnia błędów w ocenie jakości w 98% przypadków. Kontroler z uprawnieniami drugiej kategorii sprawdza w ciągu godziny 15 wyrobów a dokładność jego kontroli jest równa 95%.
Stawka dzienna brutto kontrolera z uprawnieniami pierwszej kategorii jest równa 16 zł na godzinę, kontrolera z uprawnieniami drugiej kategorii 12 zł na godzinę. Każdy błąd kontrolera kosztuje firmę 8 zł.
Kierownictwo firmy chce określić optymalny skład pracowników działu kontroli technicznej zapewniający minimalne koszty kontroli. Doradź kierownictwu, ilu kontrolerów z uprawnieniami poszczególnych kategorii należy zatrudnić.
Zinterpretuj wynik rozwiązania zadania w kategoriach praktycznych.

ROZWIĄZANIE:

Oznaczmy: x – liczba kontrolerów I kategorii $x \in N$
y - liczba kontrolerów II kategorii $y \in N$

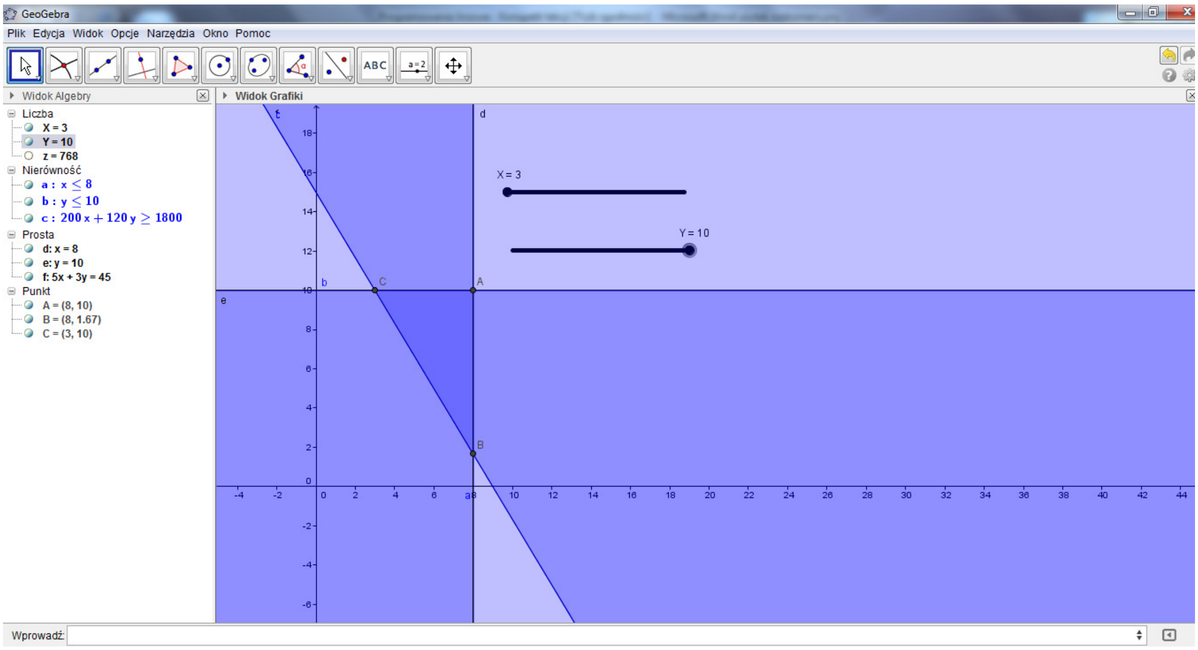
z – koszty zatrudnienia przez firmę *x* kontrolerów I kategorii
i *y* kontrolerów II kategorii.

Określamy warunki w postaci układu nierówności liniowych:

$$\begin{cases} x \le 8 \\ y \le 10 \\ 25 \cdot 8x + 15 \cdot 8y \ge 1800 \end{cases}$$

Wyznaczamy liniową funkcję celu podlegającej minimalizacji:

$$z = 96x + 48y$$



Graficzne rozwiązujemy układ nierówności liniowych opisujących warunki zadania (określamy podzbiór punktów płaszczyzny opisanych tym układem).

Odp: Firma powinna zatrudnić 3 kontrolerów I kategorii oraz 10 kontrolerów II kategorii. Koszty zatrudnienia kontrolerów wynoszą 748 zł dziennie.

3. Sprawdzenie wiedzy (praca własna z komputerem)

Stworzenie modelu matematycznego i rozwiązanie go przy użyciu programu GeoGebra.

PROBLEM 5[(3)]

Zakład produkuje dwa wyroby, które są wykonywane na dwóch obrabiarkach i na frezarce. Czas pracy tych maszyn jest ograniczony i wynosi 33000 h dla obrabiarki O_1, 13000 h dla obrabiarki O_2 i 80000 h dla frezarki. Zużycie czasu pracy maszyn w godzinach na produkcję jednostki każdego z wyrobów podano w tabeli:

Maszyny	Zużycie czasu pracy na jednostkę wyrobu	
	Wyrób 1	Wyrób 2
O_1	3	1
O_2	1	1
F	5	8

Zysk ze sprzedaży wyrobu 1 wynosi 1 zł, ze sprzedaży wyrobu 2 – 3 zł. Wyrobu 2 nie można sprzedać więcej, niż 7000 sztuk. Oblicz maksymalny zysk ze sprzedaży tych wyrobów.

Odp. Zakład powinien produkować 4800 sztuk wyrobów 1 i 7000 wyrobów 2. Zysk jaki osiągnie, to 25800 zł.

PROBLEM 6[(3)]

Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: K i L. Dwa środki produkcji są limitowane, a ich zasoby wynoszą 96000 jednostek dla środka 1 i 56000 jednostek dla środka 2. Normy zużycia środków produkcji na oba wyroby podaje tabela:

Środki	Normy zużycia	
	K	L
S_1	8	16
S_2	7	4

Zdolność produkcyjna zakładu pozwala wytwarzać co najwyżej 5000 sztuk wyrobu K i 4000 sztuk wyrobu L. Zysk jednostkowy dla wyrobu K wynosi 2 zł., a dla wyrobu L – 4 zł. Ile wyrobów powinien wyprodukować zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk? Ile wynosi ten zysk?

Odp. Należy wyprodukować po 4000 sztuk każdego z wyrobów. Osiągnięty zysk będzie wynosił 24 000 zł.

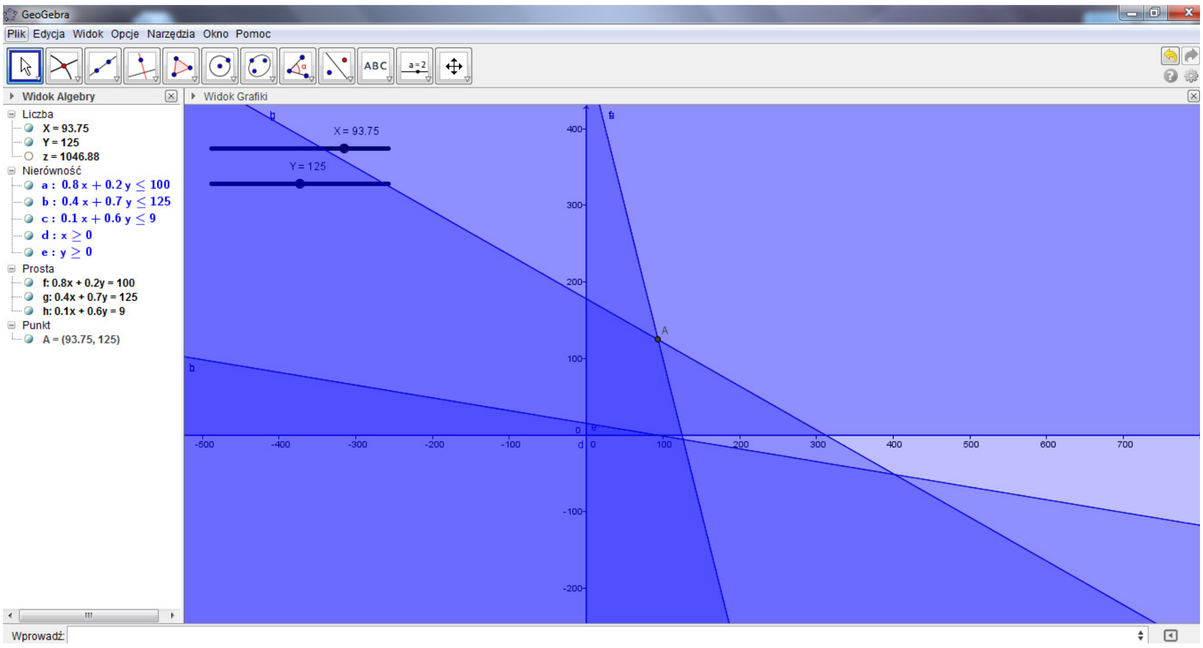
PROBLEM 7[(2)] (praca domowa)

Spółdzielnia "Psi Raj" wytwarza dwa rodzaje pokarmów dla psów: Przysmaczek i Delicja. Pokarmy te sporządzane są z trzech surowców: mięsa, tłuszczu i warzyw nazwanych tutaj dla uproszczenia odpowiednio X, Y, Z. Ilości surowców (w kg) niezbędne do wytworzenia 1 kg każdego rodzaju pokarmu podane są w tabeli:

„Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego”

Rodzaj pokarmu	Surowce		
	X	Y	Z
PRZYSMAK	0,8	0,4	0,1
DELICJA	0,2	0,7	0,6

W ciągu dnia spółdzielnia może zużyć do produkcji nie więcej niż 0,1 surowca X, 0,125 surowca Y oraz 0,09 tony surowca Z. Dzienna produkcja pokarmu AA nie może być większa niż 120 kg. Ceny 1 kg pokarmów AA i BB są równe odpowiednio 10 zł i 15 zł, a koszty wytworzenia 1 kg tych pokarmów są równe odpowiednio 5,50 zł i 10 zł.
Ile kilogramów poszczególnych pokarmów powinna produkować dziennie spółdzielnia, aby osiągnąć maksymalny zysk?



Odp: Najbardziej opłaca się produkować dziennie 93,75 kg pokarmu PRZYSMAK i 125 kg pokarmu DELICJA. Zysk ze sprzedaży tej produkcji jest równy 1 046,88 zł.

Ocenianie

W zależności od kryteriów zastosowanych przez nauczyciela

Dostępne pliki:

Zadanie 1, zadanie 2, praca domowa, układy równań – Geogebra pptx.
i

(1) Tekst zadania pochodzi ze zbioru zadań „Zdaj maturę” autorów: E. Świda, K. Kłaczkow, A. Winsztal.
(2)Tekst zadania pochodzi z programu komputerowego „Funkcje i ich wykresy, statystyka i prawdopodobieństwo”. Wydawnictwo „PODKOWA BIS s.c.”
(3) Tekst zadania pochodzi z zasobów Internetu