MODUŁ 6

# GRAWITACJA

FIZYKA – ZAKRES ROZSZERZONY

**OPRACOWANE W RAMACH PROJEKTU:**

**WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA.**

***PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI***

***Z ELEMENTAMI TECHNOLOGII INFORMATYCZNYCH***

## *Zadania – grawitacja*

### *Zadanie 1*

Rok na Jowiszu trwa 12 lat ziemskich. Oblicz promień orbity, po której Jowisz obiega Słońce. Dla uproszczenia zakładamy, że orbita ta jest kołowa.

***Rozwiązanie***

Z III prawa Keplera: $\frac{T_J^2}{R_J^3} = \frac{T_Z^2}{R_Z^3}$

gdzie: $R_Z$ – odległość Ziemi od Słońca, $T_Z$ – czas obiegu Ziemi wokół Słońca

$R_J$ – odległość Jowisza od Słońca, $T_J$ – czas obiegu Jowisza wokół Słońca

Przekształcając powyższe wyrażenie otrzymamy:

$$R_J = R_Z \sqrt[3]{\frac{T_J^2}{T_Z^2}}$$

Wstawiając dane otrzymujemy: $R_J = 1AU\sqrt[3]{\frac{(12lat)^2}{(1rok)^2}} = 5,24AU$

### *Zadanie 2*

Wyobraźmy sobie, że pewien satelita został oddalony od planety na odległość dwa razy większą niż początkowa. Odległość ta jest liczona od środka planety. Ustal, w jaki sposób wpłynie to na czas obiegu tego satelity wokół planety.

***Rozwiązanie***

Z III prawa Keplera: $\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$

gdzie: $R_1$ – odległość początkowa satelity od planety,

$T_1$ – początkowy czas obiegu satelity wokół planety

$R_2$ – odległość końcowa satelity od planety,

$T_2$ – końcowy czas obiegu satelity wokół planety

Przekształcając powyższe wyrażenie otrzymamy:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}$$

Wstawiając dane otrzymujemy: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot R_1}{R_1}\right)^3} = 2,83$

Czyli okres obiegu wzrośnie 2,83 razy.

### *Zadanie 3*

Oblicz, w jakiej odległości od Ziemi wartość natężenia pola grawitacyjnego wynosi $3\frac{N}{kg}$. Masa Ziemi wynosi $5,97 \cdot 10^{24} kg$.

***Rozwiązanie***

Zgodnie z definicją natężenia pola grawitacyjnego:

$$\gamma = G\frac{M}{r^2}$$

Więc odległość od źródła: $r = \sqrt{\frac{G \cdot M}{\gamma}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} kg}{3\frac{N}{kg}}} = 1,15 \cdot 10^7 m$

Odległość od środka Ziemi wynosi 11,5 tys. km. Promień Ziemi jest równy 6400 km, więc odległość szukanego punktu od powierzchni Ziemi wynosi 5100 km.

### *Zadanie 4*

Oblicz, na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi wartość przyspieszenia grawitacyjnego będzie 1,75 razy mniejsza niż na jej powierzchni. Potrzebne dane wyszukaj w dostępnych źródłach.

***Rozwiązanie***

Z tekstu zadania wynika, że stosunek natężeń pola grawitacyjnego w dwóch różnych punktach wynosi:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1,75$$

Wstawiając wzory na wartości natężeń w odpowiednich punktach pola:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M}{r^2}} = 1,75$$

Z tego wyrażenia stosunek odległości wynosi:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1,75} = 1,32$$

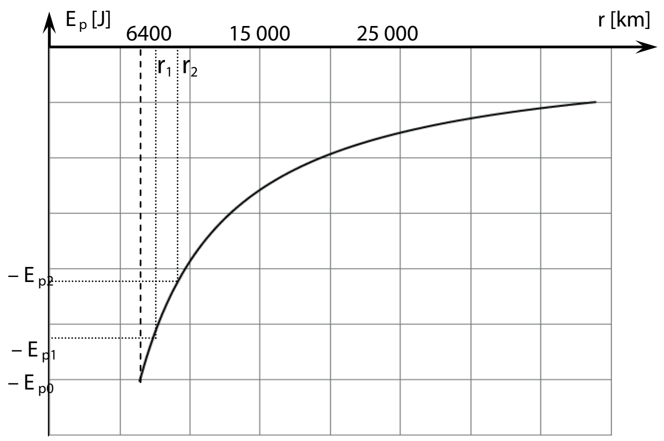
Ale $r = R + h$ więc szukana wysokość nad powierzchnię Ziemi wynosi: $h = r - R = 1,32R - R = 0,32R = 2048km$.

### *Zadanie 5*

Statek kosmiczny znajduje się początkowo na orbicie okołoziemskiej o promieniu 6800km. Po wykonaniu manewrów na orbicie wartość jego energii potencjalnej wzrosła 1,25 razy. Oblicz końcowy promień orbity tego statku.

***Rozwiązanie***

Zależność energii potencjalnej zapisywana jest wzorem: $E_p = -G\frac{M}{r}$ .




Z wykresu zależności energii potencjalnej od odległości wynika, że odległość $r_2$ jest większa niż odległość $r_1$.

Z tekstu zadania wynika, że stosunek energii potencjalnych w dwóch różnych punktach wynosi:

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}} = 1,25$$

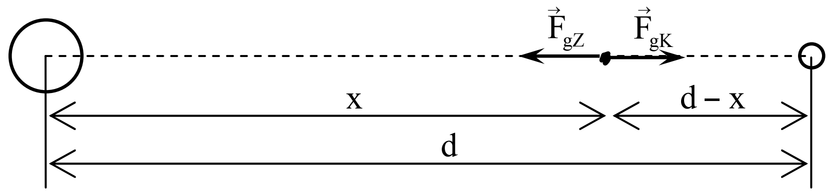
Więc stosunek odległości tych punktów od źródła wynosi: $\frac{r_2}{r_1} = 1,25$

Czyli szukana odległość $r_2 = 1,25 \cdot r_1 = 8500km$

### *Zadanie 6*

Podczas lotu na Księżyc pojazd kosmiczny Apollo znalazł się w punkcie, w którym zrównoważyły się siły grawitacyjne działające na niego pochodzące od Ziemi oraz Księżyca. Oblicz Odległość tego punktu od Ziemi. Możesz przyjąć, że masa Ziemi jest 81 razy większa od masy Księżyca. Odległość Ziemia – Księżyc wynosi 384 tys. km

***Rozwiązanie***




Na rysunku przedstawiono sytuację opisaną w tekście. Wartości sił $\vec{F}_{gK}$ oraz $\vec{F}_{gZ}$ działających na pojazd kosmiczny mają te same wartości.

Warunek ten można zapisać następująco:

$$G\frac{M_Z \cdot m}{x^2} = G\frac{M_K \cdot m}{(d-x)^2}$$

Przekształcając to równanie otrzymamy:

$$M_Z (d-x)^2 = M_K \cdot x^2$$

Ale $M_Z = 81 \cdot M_K$, więc $81 \cdot M_K (d-x)^2 = M_K \cdot x^2$.

Odległości mają w tym przypadku wartości dodatnie, więc ostatnie równanie można obustronnie spierwiastkować:

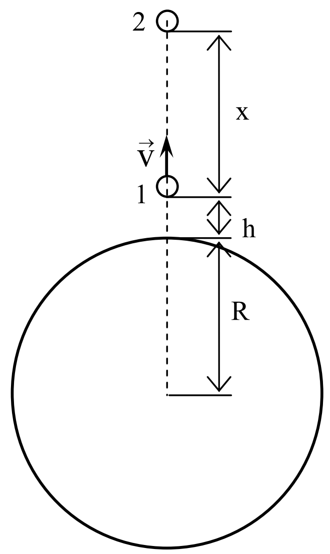
$$9 \cdot (d-x) = x$$

Więc ostatecznie $x = \frac{9}{10}d$.

Szukana odległość od Ziemi wynosi $345,6$ tys. km .

### *Zadanie 7*

Pewnemu ciału, znajdującemu się na wysokości 200 km nad powierzchnią Ziemi, nadano prędkość w kierunku pionowym. Wartość tej prędkości była równa I prędkości kosmicznej dla Ziemi. Oblicz wysokość, na jaką doleci to ciało. Promień Ziemi wynosi 6400 km.




***Rozwiązanie***

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono na schematycznym rysunku. Zgodnie z zasadą zachowania energii energia początkowa ciała w punkcie 1 jest równa energii końcowej w punkcie 2. W punkcie 1 ciało ma energię kinetyczną oraz potencjalną, natomiast w punkcie 2 ciało ma tylko energię potencjalną:

$$E_{Kpocz} + E_{Ppocz} = E_{Pkonc}$$

Wstawiając wyrażenia na energie otrzymamy:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 - G\frac{M \cdot m}{R+h} = -G\frac{M \cdot m}{R+h+x}$$

Ale I prędkość kosmiczną zapisujemy wzorem:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$$

Wstawiając to wyrażenie do warunku energii otrzymamy:

$$\frac{1}{2} m \cdot \frac{G \cdot M}{R} - G\frac{M \cdot m}{R+h} = -G\frac{M \cdot m}{R+h+x}$$

Dzieląc obie strony równania przez $m \cdot G \cdot M$ otrzymamy:

$$\frac{1}{2 \cdot R} - \frac{1}{R+h} = -\frac{1}{R+h+x}$$

Wstawiając dane do wzoru otrzymujemy:

$$\frac{1}{12800} - \frac{1}{6600} = -\frac{1}{6600+x}$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy: $x = 7026\ \mathrm{km}$

Ciało doleci na wysokość 7226 km.

## *Zadanie 8*

Międzynarodowa Stacja Kosmiczna (ISS) krąży wokół Ziemi na wysokości około 340 km nad jej powierzchnią. Oblicz wartość natężenia pola grawitacyjnego w tej odległości od Ziemi. Porównaj otrzymany wynik z wartością przyspieszenia dośrodkowego związanego z ruchem ISS wokół Ziemi. Potrzebne dane wyszukaj w dostępnych ci źródłach.

***<u>Rozwiązanie</u>***

Zależność natężenia pola grawitacyjnego od odległości od źródła:

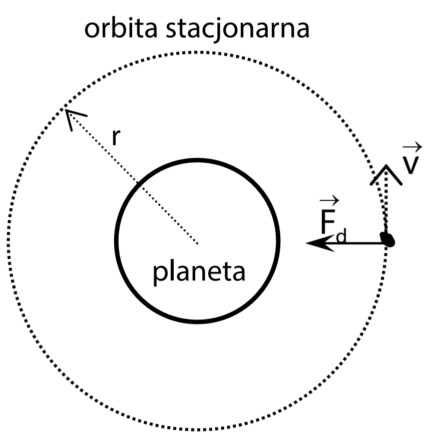
$$\gamma = G\frac{M}{r^2}$$

Wstawiając dane do wzoru otrzymujemy:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \frac{5.98 \cdot 10^{24} kg}{\left(6,74 \cdot 10^6 kg\right)^2} = 8,78 \frac{N}{kg}$$

## *Zadanie 9*

Oblicz, o ile wzrośnie wartość energii kinetycznej pojazdu kosmicznego, który podczas lotu z wysokiej orbity okołoziemskiej, zmniejszył swoją odległość od powierzchni Ziemi od 600 km do 200 km. Obie orbity są kołowe. Masa pojazdu wynosi 20 ton. Pozostałe dane znajdź w dostępnych źródłach.




***<u>Rozwiązanie</u>***

Energia kinetyczna w stanie 1:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

Ale prędkość $\vec{v}_1$ jest I prędkością kosmiczną (lub prędkością orbitalną) dla orbity o promieniu R + H:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+H}}$$

Więc energia kinetyczna w stanie 1:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M}{R+H}$$

Wstawiając dane otrzymamy:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^3 kg \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} kg}{(6400+600) \cdot 10^3 m} = 5,7 \cdot 10^{11} J$$

Energia kinetyczna w stanie 2:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

Ale prędkość $\vec{v}_2$ jest I prędkością kosmiczną (lub prędkością orbitalną) dla orbity o promieniu R + h:

$$v_2 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

Więc energia kinetyczna w stanie 2:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M}{R+h}$$

Wstawiając dane otrzymamy:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^3 kg \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} kg}{(6400+200) \cdot 10^3 m} = 6,04 \cdot 10^{11} J$$

Zmiana energii kinetycznej wynosi: $\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = 0,34 \cdot 10^{11} J$

## *Zadanie 10*

Jak sądzisz, ile planet naszego Układu Słonecznego może mieć satelity stacjonarne. Sprawdź to, wykonując odpowiednie obliczenia. Znajdź w dostępnych źródłach niezbędne dane liczbowe.

***<u>Rozwiązanie</u>***

Satelita stacjonarny to taki, który obiega planetę w płaszczyźnie równika w czasie równym obrotowi planety wokół swojej osi.

Ruch satelity odbywa się pod wpływem siły grawitacji, która pełni rolę siły dośrodkowej:

$$F_g = F_d$$

Wstawiając wzory na wartości tych sił otrzymujemy:

$$G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Mnożąc obie strony równania przez **r** oraz dzieląc przez **m**, otrzymamy:

$$G\frac{M}{r} = v^2$$

Ale v jest to prędkość liniowa w ruchu po okręgu: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$ , więc:

$$G\frac{M}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Stąd promień orbity stacjonarnej:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Do tego wzoru należy wstawić masę planety oraz okres jej obrotu, a otrzymamy promień orbity stacjonarnej. Na przykład dla planety Merkury otrzymujemy:

$$r_{ME} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 3,33 \cdot 10^{23} kg \cdot \left(5,07 \cdot 10^6 s\right)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 2,44 \cdot 10^8 m = 244 \text{ tys. km}$$

Promień Merkurego wynosi 2440 km, więc teoretycznie można byłoby umieścić satelitę stacjonarnego. Ale Merkury znajduje się zbyt blisko Słońca, aby było to możliwe. Pole grawitacyjne Słońca spowodowałoby wyrzucenie takiego obiektu z orbity wokół Merkurego.

Pozostałe planety należy sprawdzić samodzielnie.