

MODUŁ 4

MECHANIKA BRYŁY SZTYWNEJ

→ FIZYKA – ZAKRES ROZSZERZONY

OPRACOWANE W RAMACH PROJEKTU:

WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA.

PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI

Z ELEMENTAMI TECHNOLOGII INFORMATYCZNYCH

→ Zadania

Zadanie 1

Karuzela obracająca się z częstością 10 razy na sekundę zatrzymuje się w czasie $t = 30\text{ s}$. Wyznacz wartość przyspieszenia kąowego karuzeli przy założeniu, że poruszała się ona ruchem jednostajnie opóźnionym. Narysuj wykresy zależności prędkości kątowej i kąta obrotu od czasu.

Rozwiązanie

Dane:

$$f = 10 \frac{1}{s}$$

$$t = 30\text{ s}$$

$$\omega_k = 0$$

$$\varepsilon = ?$$

$$\omega(t) = ?$$

$$\alpha(t) = ?$$

W ruchu obrotowym jednostajnie opóźnionym prędkość kątowa zmienia się w czasie według równania:

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t$$

gdzie ε oznacza wartość bezwzględną przyspieszenia kąowego (tzw. opóźnienie kątowe). Po uwzględnieniu, że

$$\omega_0 = 2\pi f, \omega_k = 0$$

otrzymujemy

$$2\pi f = \varepsilon t$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi f}{t}$$

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy wartość

$$2\pi f = \varepsilon t$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi f}{t}$$

Do sporządzenia wykresów trzeba obliczyć początkową wartość prędkości kątowej:

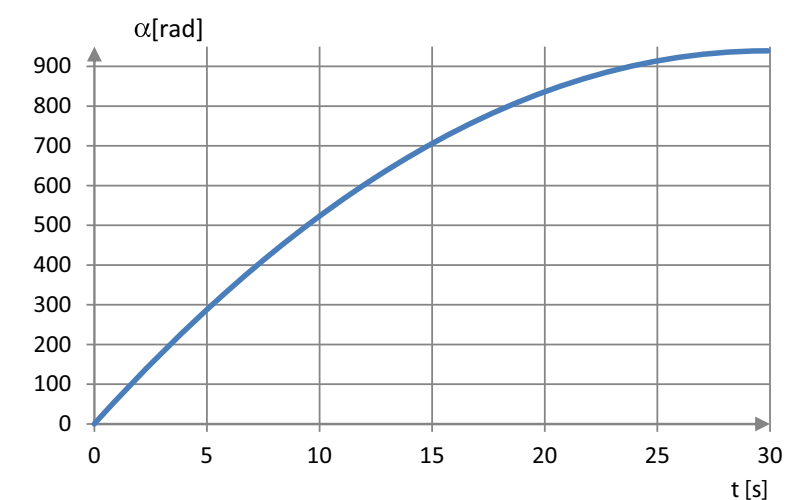
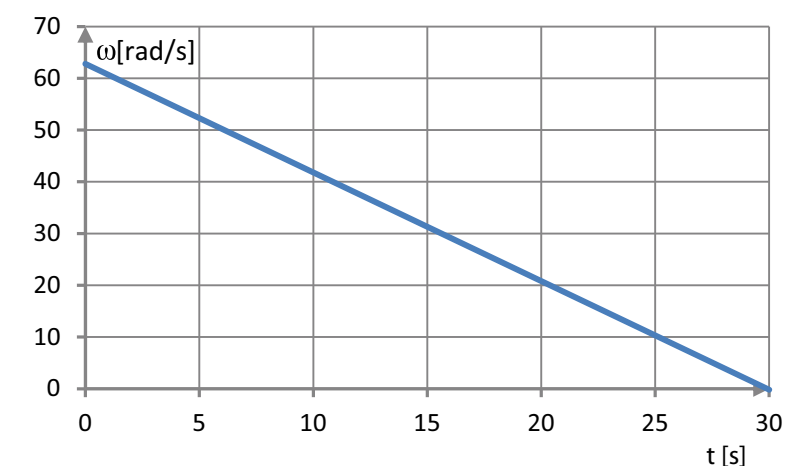
$$\varepsilon = \frac{2\pi \cdot 10}{30} \approx 2,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 62,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Wykresy wykonane w arkuszu kalkulacyjnym wg zależności:

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t$$

$$\alpha(t) = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$$



Zadanie 2

Oblicz wartość siły, której ramię wynosi 0,5 m, a nadaje ona ciału o momencie bezwładności $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ przyspieszenie kątowe 2 rad/s^2 .

Rozwiązanie

Dane:

$$I = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$d = 0,5 \text{ m}$$

$$\varepsilon = 2 \text{ rad/s}^2$$

$$F = ?$$

Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

gdzie M - moment siły wynosi

$$M = F \cdot d$$

Z połączenia obu równań otrzymujemy

$$F \cdot d = \varepsilon \cdot I$$

$$F = \frac{\varepsilon \cdot I}{d}$$

$$F = \frac{2 \cdot 10}{0,5} = 40 \text{ N}$$

$$[F] = \frac{\text{rad} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

Zadanie 3

Znajdź związek między energią kinetyczną ruchu obrotowego bryły a jej momentem pędu.

Rozwiązanie

Energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Moment pędu w ruchu obrotowym

$$L = I\omega$$

Prędkość kątowa

$$\omega = \frac{L}{I}$$

Po wstawieniu do wzoru na energię kinetyczną otrzymujemy

$$E_k = \frac{I \left(\frac{L}{I} \right)^2}{2} = \frac{I \cdot L^2}{2I^2}$$

$$E_k = \frac{L^2}{2I}$$

Zadanie 4

Koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ wiruje ze stałą prędkością kątową wokół nieruchomej osi obrotu. Okres obrotu koła wynosi $T = 0,2 \text{ s}$. Oblicz moment siły, który spowoduje zatrzymanie koła w ciągu 5 s.

Rozwiązanie

Dane:

$$T = 0,2 \text{ s}$$

$$t = 5 \text{ s}$$

$$I = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$M = ?$$

Pod działaniem stałego momentu siły koło porusza się ruchem obrotowym jednostajnie opóźnionym, prędkość kątowa maleje liniowo do zera zgodnie z zależnością

$$\omega_k = \omega_0 - \varepsilon \cdot t = 0,$$

gdzie początkowa prędkość kątowa wynosi

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Po przekształceniu

$$\frac{2\pi}{T} = \varepsilon \cdot t$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{Tt}$$

Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego moment siły

$$M = \varepsilon \cdot I$$

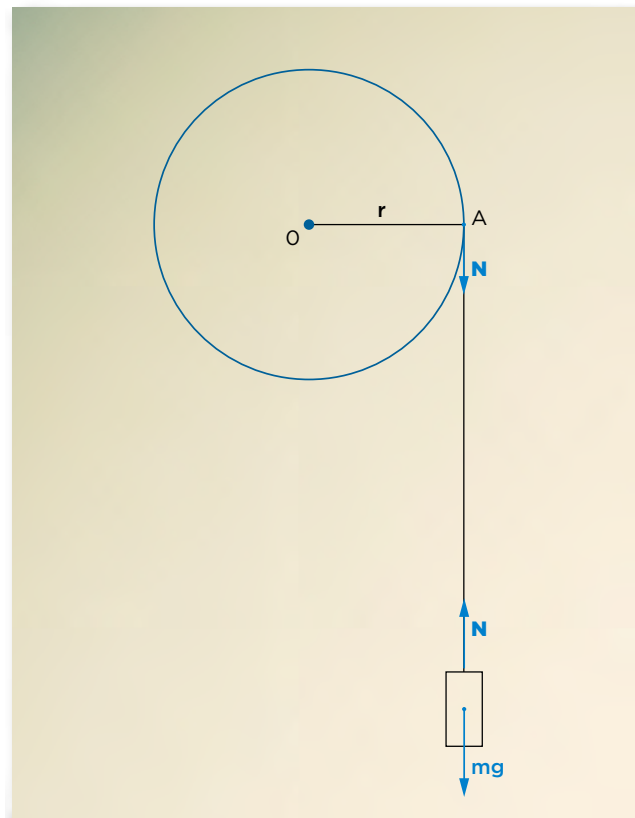
$$M = \frac{2\pi I}{Tt}$$

Po wstawieniu danych liczbowych

$$M = \frac{2 \cdot 20\pi}{0,2 \cdot 5} = 40\pi = 125,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$[M] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s} \cdot \text{s}} = \text{N} \cdot \text{m}$$

Zadanie 5



Na walec o promieniu r i masie M , nawinięto nić, na której zawieszono ciężarek o masie m . Walec może obracać się względem nieruchomej osi obrotu O . Oblicz przyspieszenie ciężarka. Moment bezwładności walca $I = \frac{1}{2}Mr^2$.

Rozwiązanie

Dane:

M, r, m

$a = ?$

Na ciężarek działa siła ciężkości $Q = mg$ i siła napięcia nici N .

Równanie ruchu ciężarka:

$$ma = mg - N$$

Ruch obrotowy walca opisuje równanie:

$$I\varepsilon = Nr$$

Przyspieszenie kątowe walca jest związane z przyspieszeniem liniowym punktu na obwodzie walca (= przyspieszeniu ciężarka) równaniem:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}$$

Przekształcając równanie ruchu obrotowego otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}Mr^2 \frac{a}{r} = Nr$$

$$N = \frac{1}{2}Ma$$

Po wstawieniu do równania ruchu ciężarka:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma$$

$$2ma = 2mg - Ma$$

$$(M + 2m)a = 2mg$$

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}$$

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$

Zadanie 6

Z równi pochyłej o wysokości $h = 1\text{ m}$ stacza się bez poślizgu jednorodna kula o promieniu r . Oblicz wartość prędkości kuli na dole równi przy założeniu, że podczas toczenia się po równi 5% początkowej energii mechanicznej kuli ulega rozproszeniu. Moment bezwładności kuli względem osi przechodzącej przez jej środek wynosi $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Rozwiązanie

Dane

$h = 1\text{ m}$

$E_2 = 0,95E_1$

gdzie E_1 – początkowa, a E_2 – końcowa energia mechaniczna kuli

Zakładamy, że kula spoczywała na górze równi. Początkowa energia mechaniczna kuli to energia potencjalna ciężkości. Przyjmując zerowy poziom energii potencjalnej na dole równi

$$E_1 = mgh$$

Energia mechaniczna kuli na dole równi składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy kuli i energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek kuli, czyli:

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{2mr^2}{5} \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7mv^2}{10}$$

Uwzględniając straty energii otrzymujemy

$$\frac{7mv^2}{10} = 0,95mgh$$

$$7v^2 = 9,5gh$$

$$v = \sqrt{\frac{9,5gh}{7}}$$

Wstawiając dane liczbowe

$$v = \sqrt{\frac{9,5 \cdot 9,81 \cdot 1}{7}} \approx 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[v] = \sqrt{\frac{m \cdot m}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

Odp. Wartość prędkości kuli na dole równi wynosi ok. 3,6 m/s.