

INFORMATYKA

– MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA

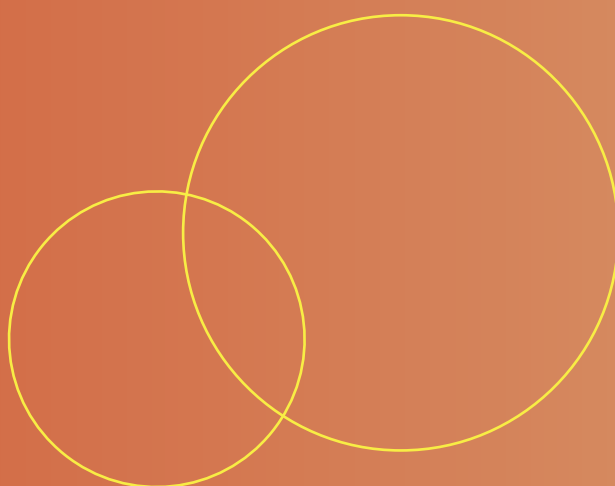
PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI Z ELEMENTAMI
PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Moduł interdyscyplinarny: informatyka – fizyka



Numeryczne obliczanie orbit satelitów (planet)

Witold Kranas



Człowiek - najlepsza inwestycja



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**WARSZAWSKA
WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI**

**UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY**



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tytuł: ***Numeryczne obliczanie orbit satelitów (planet)***

Autor: ***Witold Kranas***

Redaktor merytoryczny: ***prof. dr hab. Maciej M. Sysło***

Materiał dydaktyczny opracowany w ramach projektu edukacyjnego
Informatyka – mój sposób na poznanie i opisanie świata.
Program nauczania informatyki z elementami przedmiotów
matematyczno-przyrodniczych

www.info-plus.wysi.edu.pl

infoplus@wysi.edu.pl

Wydawca: Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
ul. Lewartowskiego 17, 00-169 Warszawa
www.wysi.edu.pl
rektorat@wysi.edu.pl

Projekt graficzny: *Marzena Kamasa*

Warszawa 2013

Copyright © Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki 2013
Publikacja nie jest przeznaczona do sprzedaży

Człowiek - najlepsza inwestycja



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA
WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





SCENARIUSZ TEMATYCZNY

NUMERYCZNE OBLICZANIE ORBIT SATELITÓW (PLANET)

FIZYKA – POZIOM ROZSZERZONY

OPRACOWANY W RAMACH PROJEKTU:
INFORMATYKA – MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA.
PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI
Z ELEMENTAMI PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Streszczenie

Na podstawie definicji prędkości, przyspieszenia, II zasady dynamiki oraz prawa powszechnego ciążenia można krok po kroku obliczać położenie satelity w ruchu wokół Ziemi. Metoda wymaga albo napisania dość prostego programu, obliczającego w pętli położenie, prędkość i przyspieszenie satelity, albo wpisania wzorów w arkuszu kalkulacyjnym. Uczniowie poznają podstawy metody (opisanej w Wykładach Feynmana). Realizują algorytm w arkuszu kalkulacyjnym lub w wybranym środowisku programowania. Piszą i uruchamiają program, sprawdzają wyniki dla różnych wartości prędkości początkowej. Dyskutują sposoby unikania błędów numerycznych.

Czas realizacji

3-6 x 45 minut (zależnie od sposobu realizacji)

Tematy lekcji:

1. Ruch planet, satelitów i zasady dynamiki – algorytm obliczeń orbity (lekcja fizyki bez komputerów)
2. Obliczanie orbity w arkuszu (lekcja informatyki lub fizyki w pracowni komputerowej)
3. Obliczanie orbity w środowisku Khan Academy CS (lekcja informatyki lub fizyki w pracowni komputerowej)

Podstawa programowa

Budowa Układu Planetarnego oraz prawa ruchu planet znajdują się w podstawie programowej fizyki (na obu poziomach). Stosowanie podejścia algorytmicznego do modelowania i rozwiązywania sytuacji problemowych oraz wykorzystywanie arkusza do zapisywania algorytmów występuje w podstawie programowej informatyki głównie na poziomie rozszerzonym.

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: fizyka (poziom rozszerzony)

Cele kształcenia – wymagania ogólne

Cele realizowane zarówno w zakresie podstawowym, jak i rozszerzonym:

- I. Wykorzystanie wielkości fizycznych do opisu poznanych zjawisk lub rozwiązywania prostych zadań obliczeniowych.
- III. Wskazywanie w otaczającej rzeczywistości przykładów zjawisk opisywanych za pomocą poznanych praw i zależności fizycznych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

1. Ruch punktu materialnego.

Uczeń:

- 4) wykorzystuje związki pomiędzy położeniem, prędkością i przyspieszeniem w ruchu jednostajnym i jednostajnie zmiennym do obliczania parametrów ruchu;
- 5) rysuje i interpretuje wykresy zależności parametrów ruchu od czasu.

4. Grawitacja.

Uczeń:

- 1) wykorzystuje prawo powszechnego ciążenia do obliczenia siły oddziaływań grawitacyjnych między masami punktowymi i sferycznie symetrycznymi;
- 6) wyjaśnia pojęcie pierwszej i drugiej prędkości kosmicznej; oblicza ich wartości dla różnych ciał niebieskich.

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom rozszerzony)

Cele kształcenia – wymagania ogólne

- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.
- IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

4. Opracowywanie informacji za pomocą komputera, w tym: rysunków, tekstów, danych liczbowych, animacji, prezentacji multimedialnych i filmów. Uczeń:

- 4) wykorzystuje arkusz kalkulacyjny do obrazowania zależności funkcyjnych i do zapisywania algorytmów.

5. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, stosowanie podejścia algorytmicznego. Uczeń:

- 1) analizuje, modeluje i rozwiązuje sytuacje problemowe z różnych dziedzin;
- 2) stosuje podejście algorytmiczne do rozwiązywania problemu.



LEKCJA NR 1

TEMAT: Ruch planet, satelitów i zasady dynamiki – algorytm obliczeń orbity (lekcja fizyki bez komputerów)

Streszczenie

Na podstawie definicji prędkości, przyspieszenia, II zasady dynamiki oraz prawa powszechnego ciążenia można krok po kroku obliczać położenie satelity w ruchu wokół Ziemi. Potrzebne są definicje prędkości i przyspieszenia oraz prawo powszechnego ciążenia. Po raz pierwszy ten sposób numerycznego obliczania orbity został opisany w pierwszym tomie Feynmana wykładów z fizyki.

Cel

- Ugruntowanie znajomości definicji prędkości i przyspieszenia.
- Umiejętność wykorzystania prawa powszechnego ciążenia do obliczenia siły oddziaływań grawitacyjnych między masami punktowymi i sferycznie symetrycznymi.
- Umiejętność wyjaśniania pojęcia pierwszej i drugiej prędkości kosmicznej i obliczania ich wartości dla różnych ciał niebieskich.
- Umiejętność tworzenia algorytmu rozwiązania problemu.

Słowa kluczowe

prawo powszechnego ciążenia, prędkości kosmiczne, algorytm, całkowanie numeryczne

Co przygotować

- **AlgorytmiWzory.doc** – zestawienie wzorów potrzebnych do obliczania orbity (materiały pomocnicze 1)



Przebieg zajęć

Przed lekcją nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie sobie definicji prędkości, przyspieszenia oraz prawa powszechnego ciążenia.

Wprowadzenie (15 minut)

Uczniowie wypisują na tablicy definicję prędkości: $v = \Delta s / \Delta t$, dyskutują znaczenie symbolu Δ . Zostaje ustalone, że ponieważ Δ oznacza w definicji małą różnicę, to będzie ona oznaczana małą literą d . Nauczyciel przypomina, że prędkość jest wielkością wektorową. W przypadku ruchu odbywającego się w jednej płaszczyźnie będą dwie składowe prędkości:

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt \quad \text{stąd zmiana położenia to} \quad dx = v_x \cdot dt, \quad dy = v_y \cdot dt.$$

Teraz pora na definicję przyspieszenia, które określa jak szybko zmienia się prędkość:

$$a_x = dv_x/dt, \quad a_y = dv_y/dt, \quad \text{a stąd zmiana prędkości to} \quad dv_x = a_x \cdot dt, \quad dv_y = a_y \cdot dt.$$

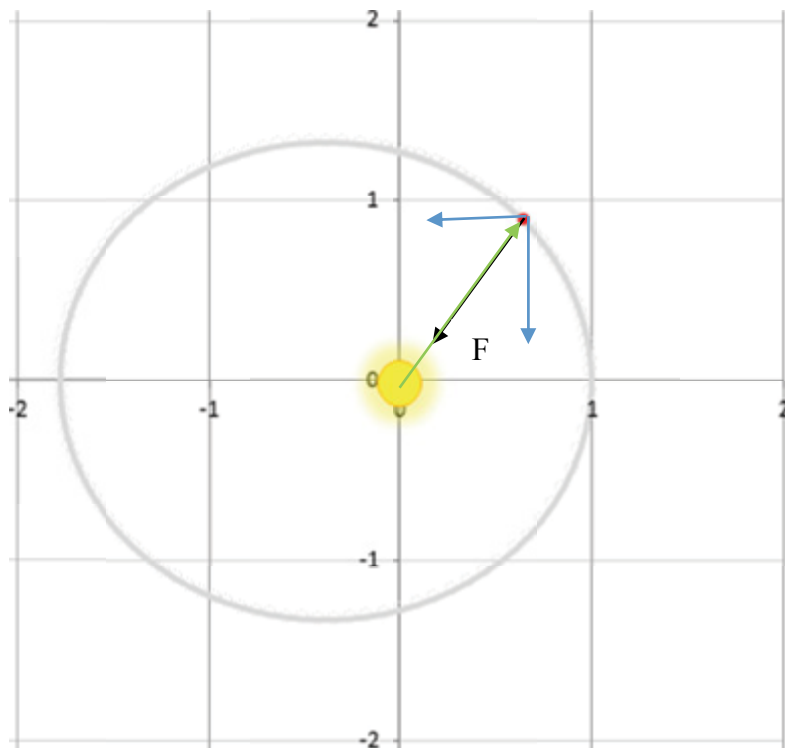
Przyspieszenie można policzyć korzystając z II zasady dynamiki: $a = F/m$.

Jeśli więc znamy siłę, to obliczymy przyspieszenie, a co za tym idzie zmianę prędkości.

Mając zmianę prędkości i pierwotną prędkość możemy policzyć zmianę położenia, czyli określić nowe położenie. W ten sposób punkt po punkcie znajdziemy tor ruchu ciała.

Ruch planet i satelitów.

Przypomnienie prawa powszechnego ciążenia: $F = \frac{GMm}{r^2}$.



Zadanie dla uczniów (10 minut)

Satelita o masie m znajduje się w odległości r od środka Ziemi o masie M . Policz składowe siły ciężkości w pokazanym na rysunku układzie odniesienia.

Prawo powszechnego ciążenia: $F = \frac{GMm}{r^2}$ określa wartość siły grawitacji. Jest ona skierowana do centrum ciała przyciągającego. Jeśli w tym centrum umieścimy środek układu współrzędnych, to wektor siły będzie położony wzdłuż promienia, ale skierowany przeciwnie – do środka. Można to zapisać w postaci $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} F$, gdzie $\vec{F} = [F_x, F_y]$, a $\vec{r} = [x, y]$ skąd:

$$F_x = -\frac{x}{r} F, F_y = -\frac{y}{r} F. \text{ Wartość } r \text{ można obliczyć ze wzoru } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ostatecznie wzory na składowe siły przybierają postać: $F_x = -\frac{GMmx}{r^3}, F_y = -\frac{GMmy}{r^3}$.

Układanie schematu obliczeń - algorytmu (15 minut)

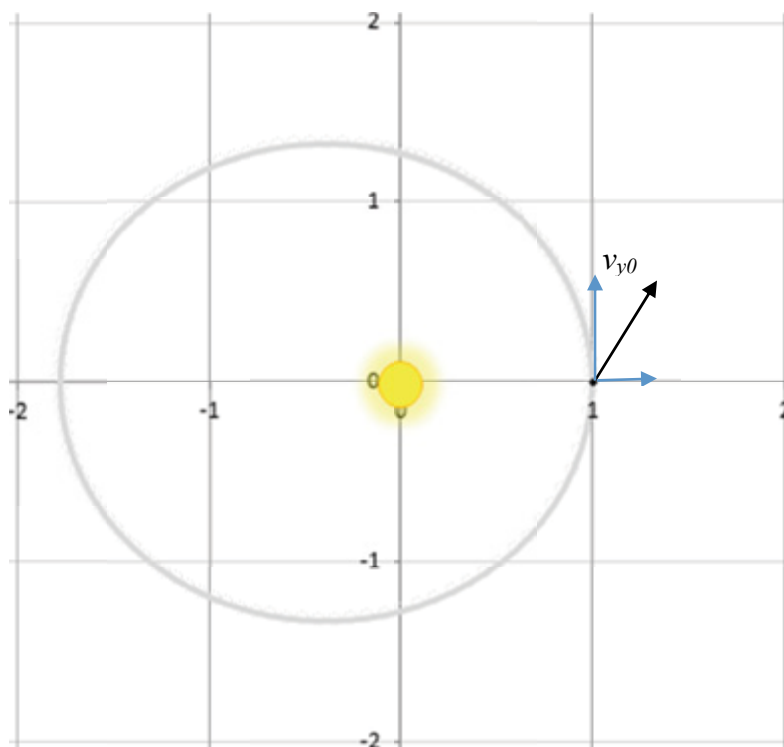
Specyfikacja zadania

Satelita o znikomej masie znajdujący się w odległości $r = R + H$ (gdzie R – promień Ziemi, H – wysokość nad jej powierzchnią) od środka Ziemi o masie M ma prędkość $\vec{v}_0 = [v_{x0}, v_{y0}]$.

Oblicz krok po kroku kolejne położenia satelity. Uwzględnij możliwość wstawiania różnych wartości prędkości początkowej.



Ustalenie układu współrzędnych i wartości początkowych



Wybieramy układ współrzędnych tak, aby $r = x, y = 0$;

Składowe prędkości początkowej wynoszą v_{x0} i v_{y0} .

Do obliczenia przyspieszenia: $a = \frac{F}{m}$; $F = \frac{GMm}{r^2}$
 potrzeba wielkości stałej grawitacji $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ (w jednostkach SI)
 oraz masy Ziemi $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.

Schemat obliczeń

Nauczyciel wspólnie z uczniami wypisuje kolejne kroki – algorytm obliczeń.

1) Przyjęcie wartości początkowych położenia $x = R+H, y = 0$ i prędkości v_{x0}, v_{y0} oraz masy planety M , czasu $t = 0$ i kroku czasowego dt ;

2) Obliczenie brakujących danych dla $t=0$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, a_x = -\frac{GMx}{r^3}, a_y = -\frac{GM y}{r^3};$$

3) Mała poprawka – obliczenie prędkości w połowie przedziału czasowego (uśrednienie prędkości):

$$v_x = v_{x0} + a_x \cdot dt/2, \quad v_y = v_{y0} + a_y \cdot dt/2;$$

4) W pętli, czyli w kółko (ale z warunkiem $r \geq R$):

– dla kolejnej wartości czasu: $t + dt$;

– obliczenie nowych współrzędnych: $x + v_x \cdot dt, y + v_y \cdot dt$;

– obliczenie nowych składowych przyspieszenia: $a_x = -\frac{GMx}{r^3}, a_y = -\frac{GM y}{r^3}, (r = \sqrt{x^2 + y^2})$;

– obliczenie nowych wartości uśrednionej prędkości: $v_x + a_x \cdot dt, v_y + a_y \cdot dt$; - ewentualnie wyrysowanie nowego położenia na wykresie.

Dyskusja podsumowująca (5 minut)

Nauczyciel dyskutuje z uczniami możliwości wykonania algorytmu. Podkreśla, że krok 4) algorytmu musi być wykonany wiele razy, ponieważ krok czasowy powinien być mały. Następnie prosi uczniów o zaproponowanie środowisk, w których można algorytm zrealizować.

Może dokonać podziału uczniów na grupy, które zrealizują algorytm w różnych środowiskach. W kolejnych lekcjach zostaną przedstawione dwa sposoby realizacji algorytmu: w arkuszu kalkulacyjnym oraz w środowisku ProcessingJS (JavaScript).

Dostępne zasoby



1. Plik AlgorytmiWzory.doc (materiały pomocnicze 1)

Materiały źródłowe

Filmy w Internecie (NASA):

http://www.youtube.com/watch?v=_9JxSrwITA4 – Moon, Mars, and Beyond (8 min) oraz

http://www.youtube.com/watch?v=vSfOg_05K4k – STS-135 Space Shuttle Launch (2,5 min).



LEKCJA NR 2

TEMAT: Obliczanie orbity w arkuszu (lekcja informatyki lub fizyki w pracowni komputerowej)

Streszczenie

Krok po kroku realizujemy omówiony na poprzedniej lekcji algorytm w arkuszu kalkulacyjnym, a następnie tworzymy wykres przedstawiający orbitę.

Cel

- Ugruntowanie umiejętności posługiwania się arkuszem kalkulacyjnym.
- Umiejętność stosowania formuł i nazw zakresów komórek w arkuszu.
- Umiejętność przeniesienia algorytmu rozwiązania problemu do arkusza kalkulacyjnego.

Słowa kluczowe

algorytm, nazwy w arkuszu, wykres punktowy (X, Y)

Co przygotować

- Komputery z zainstalowanym arkuszem kalkulacyjnym (MS Excel lub inny podobny np. LibreOffice Calc)
- Zapis algorytmu sformułowany na poprzedniej lekcji:
AlgorytmiWzory.doc – algorytm i zestawienie wzorów potrzebnych do obliczania orbity (materiały pomocnicze 1)
- Arkusze - ObliczanieOrbity.xlsx, ObliczanieOrbity2Jezeli.xlsx, ObliczanieOrbity3Mars.xlsx, UkładSłoneczny2obr.xls.



Przebieg zajęć

Uczniowie indywidualnie lub w zespołach dwuosobowych pracują przy komputerach, tworząc arkusz obliczeń orbity.

Wprowadzenie (10 minut)

Nauczyciel przypomina algorytm opracowany na poprzedniej lekcji.

Następnie planuje razem z uczniami konstrukcję arkusza.

Jakie dane początkowe będą potrzebne?

dt – krok czasowy, R – promień Ziemi, H – wysokość startu nad powierzchnią Ziemi,

v_x, v_y – składowe prędkości, G – stała grawitacji, M – masa Ziemi.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	dt (s)	R (km)	v_x (km/s)	H (km)		v_y (km/s)	G	M (masa)		GM
2	60	6378	0	0		7,9	6,7E-11	5,97E+24		3,98378E+14

Dla komórek, których wartości mogą ulegać zmianom, wybieramy żółte tło. Obliczamy również wartość iloczynu $G \cdot M$. Następnie robimy jeden wiersz odstępu, żeby oddzielić tabelę z obliczeniami od danych. Jakie kolumny trzeba przygotować?

	A	B	C	D	E	F	G	H
3								
4	t (s)	x (m)	v _x (m/s)	a _x	y (m)	v _y (m/s)	a _y	r (m)

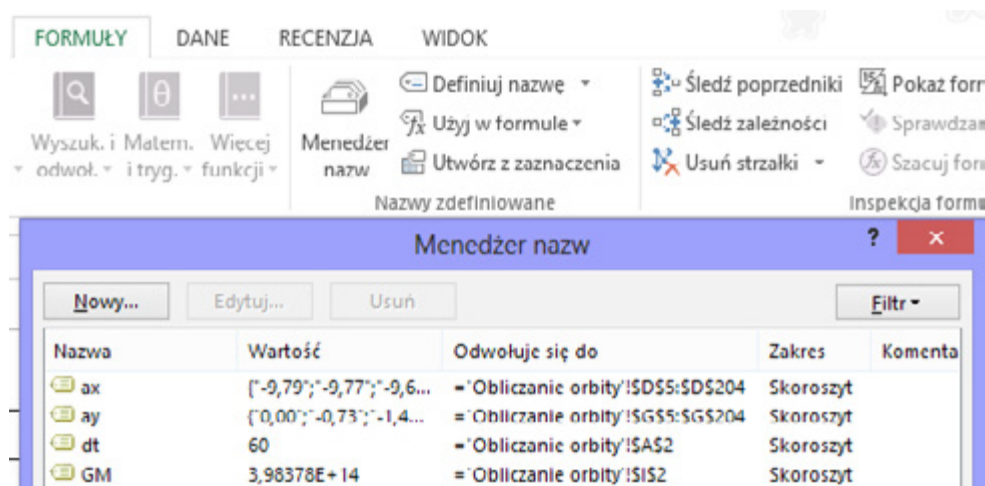
Wprowadzenie nazw.

Nauczyciel proponuje **nadanie nazw zakresom komórek**, aby łatwiej było wpisywać formuły.

Nazwy należy wprowadzić dla przynajmniej 200 kolejnych komórek w kolumnach zawierających: x, y, v_x, v_y, a_x, a_y, r (nazwa pr).

Nazwę definiujemy poprzez zaznaczenie zakresu komórek, wpisanie nazwy w polu nazwy i zatwierdzenie przez naciśnięcie klawisza Enter. Do poprawiania nazw trzeba użyć **Menedżera nazw** znajdującego się w karcie Formuły wstążki w arkuszu Excel.

Warto również nadać nazwy komórkom z danymi początkowymi wykorzystywanymi podczas obliczeń: dt – krok czasowy, G M – iloczyn masy i stałej grawitacji.



Praca indywidualna lub w zespołach (30 minut)

Przyjmujemy, że wartości w tabeli będą obliczane w układzie SI (czyli odległości trzeba zamienić metry, prędkości na m/s).

Realizujemy **punkty 1 i 2 algorytmu** obliczeń. Uczniowie proponują, jakie wartości lub wzory należy wpisać w pierwszym wierszu tabeli obliczeń (5. wiersz arkusza):

$$\begin{aligned}
 t &= 0, \\
 x &= (B2+D2)*1000, & v_x &= 0, & a_x &= -GM*x/pr^3, \\
 y &= 0, & v_y &= F2*1000, & a_y &= -GM*y/pr^3, \\
 r &= \text{PIERWIASTEK}(x^2+y^2).
 \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że wzory dla a_x, a_y i r są już gotowe do skopiowania do kolejnych komórek w odpowiednich wierszach.

Wpisujemy wzory do drugiego wiersza tabeli obliczeń (6 wiersz arkusza).

Realizujemy **punkt 3 algorytmu** obliczeń – poprawkę w obliczaniu prędkości:

W kolumnie **C** wpisujemy dla v_x formułę =C5+D5*dt/2 (C5 – poprzednia wartość składowej x prędkości, D5 – poprzednia wartość składowej x przyspieszenia).

W kolumnie **F** wpisujemy dla v_y formułę =F5+G5*dt/2 (F5 – poprzednia wartość składowej y prędkości,



G5 – poprzednia wartość składowej y przyspieszenia).

Zaczynamy realizować **punkt 4) algorytmu** obliczeń – obliczamy nowe położenie

W kolumnie **A** zwiększamy czas o dt , wpisujemy formułę: $=A5+dt$.

W kolumnie **B** obliczamy x , wpisujemy formułę: $=B5+v_x*dt$.

W kolumnie **E** obliczamy y , wpisujemy formułę: $=E5+v_y*dt$.

W kolumnach **H, D i G**, kopiujemy wzory na promień i składowe przyspieszenia z poprzedniego wiersza

Wpisujemy wzory do trzeciego wiersza tabeli obliczeń (7. wiersza arkusza).

Jedynie formuły, które wymagają zmiany, to wzory na obliczanie nowych składowych prędkości. W wierszu 6. obliczyliśmy składowe prędkości w połowie przedziału czasowego. Aby zawsze prędkość była obliczana dla połowy przedziału, należy już teraz obliczać ją z krokiem czasowym dt .

W kolumnie **C** wpisujemy dla v_x formułę $=C6+D6*dt$ ($C6$ – poprzednia wartość składowej x prędkości, $D6$ – poprzednia wartość składowej x przyspieszenia).

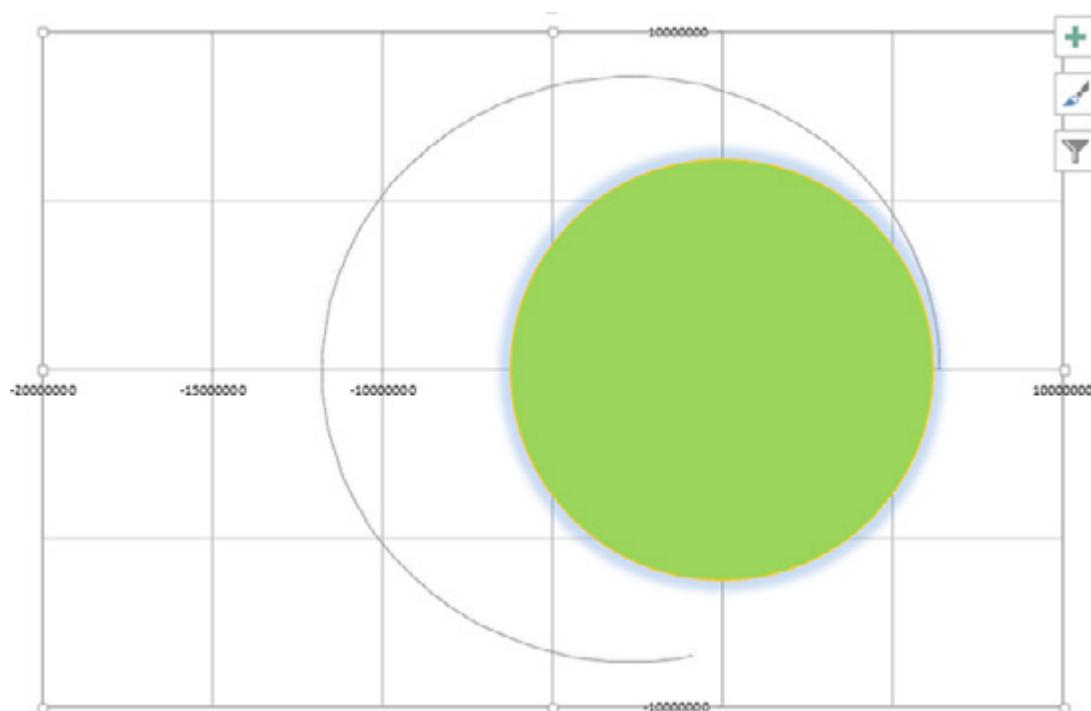
W kolumnie **F** wpisujemy dla v_y formułę $=F6+G6*dt$ ($F6$ – poprzednia wartość składowej y prędkości, $G6$ – poprzednia wartość składowej y przyspieszenia).

W pozostałych kolumnach kopiujemy formuły z wiersza 6.

Wypełniamy 100 kolejnych wierszy tabeli kopiując formuły z wiersza 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	dt (s)	R (km)	v_x (km/s)	H (km)		v_y (km/s)	G	M (masa)
2	60	6378	0	0		9	6,7E-11	5,97E+24
3								
4	t (s)	x (m)	v_x (m/s)	a_x	y (m)	v_y (m/s)	a_y	r (m)
5	0	6378000	0	-9,79	0	9000	0,00	6378000
6	60	6360372	-294	9,74	540000	9000	-0,83	6383254
7	120	6307673	-878	-9,59	1077022	8950	-1,64	6398962
8	180	6220448	-1454	-9,34	1608150	8852	-2,42	6424961
9	240	6099587	-2014	-9,01	2130581	8707	-3,15	6460986
10	300	5946292	-2555	-8,60	2641683	8518	-3,82	6506680
11	360	5762039	-3071	-8,13	3139032	8289	-4,43	6561602
12	420	5548536	-3558	-7,60	3620446	8024	-4,96	6625245
13	480	5307668	-4014	-7,04	4084005	7726	-5,42	6697047
14	540	5041458	-4437	-6,45	4528064	7401	-5,80	6776405
15	600	4752013	-4824	-5,86	4951253	7053	-6,10	6862691
16	660	4441481	-5176	-5,26	5352473	6687	-6,34	6955266

Tworzymy wykres punktowy XY dla położenia satelity czyli x, y zawartych w kolumnach B i E. Kolumny należy zaznaczać z wciśniętym klawiszem **Ctrl**.



Badanie i dyskusja wyników (10 minut)

Mamy gotowy arkusz z obliczaniem orbity.

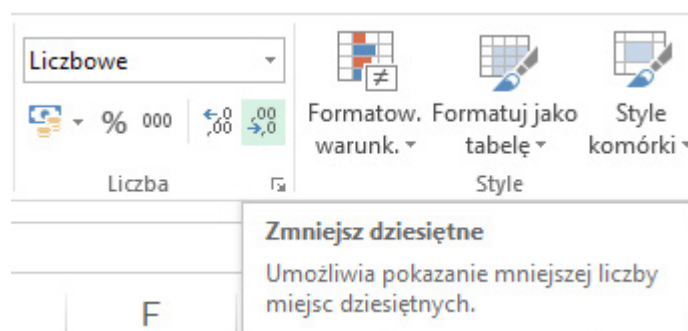
Przed wszystkim trzeba sprawdzić, czy obliczenia są prawidłowe

Wiemy, że dla orbity kołowej $GM/r^2 = v^2/r$, zatem $v^2 = GM/r$, czyli $v = \sqrt{GM/r} \approx 7900$ m/s.

Sprawdzamy więc wynik obliczeń dla $v = 7,9$ km/s (i $H = 0$). Jeżeli otrzymaliśmy tor kołowy, to wszystko jest w porządku.

Warto też zmniejszyć dokładność wyświetlania obliczeń

Będą one bardziej czytelne, jeśli ustawimy wyświetlanie liczb bez miejsc dziesiętnych, zostawiając dwa miejsca dziesiętne tylko w przypadku przyspieszenia.



Rozszerzamy obliczenia o wartości prędkości i przyspieszenia.

W tabeli można łatwo śledzić odległość satelity (r). Dodajmy możliwość śledzenia wartości prędkości i przyspieszenia (v , a) w kolejnych kolumnach.



J	K	L	J	K	L	M
GM			GM			
3,98E+14			3,98E+14			
V (m/s)	a (m/s ²)		V (m/s)	a (m/s ²)		
=PIERWIASTEK(vx^2+vy^2)			7900	=PIERWIASTEK(ax^2+ay^2)		
7905	9,79		7905	9,79		
7905	9,79		7905	9,79		

Przeprowadzamy obliczenia dla różnych wartości danych początkowych

- dla różnych wartości kroku czasowego dt (im mniejszy, tym dokładniej);
- dla różnych wartości wysokości startu H ;
- dla różnych wartości prędkości v_y ;
- dla różnych planet M (to jest dobre zadanie na pracę domową).

Problemy (dla zainteresowanych)

Brak warunku $r < R$

Jeżeli wstawimy v_y mniejsze od prędkości kołowej (ok. 7,9 km/s), to satelita uderzy w Ziemię, jednak obliczenia w arkuszu zostaną przeprowadzone, ponieważ nie został we wzorach uwzględniony warunek, aby $r < R$. Żeby uwzględnić ten warunek trzeba we wszystkich wzorach wprowadzić funkcję JEŻELI. Przykładowo dla x w 6. wierszu: =JEŻELI(H5<\$B\$2*1000;"";B5+vx*dt) gdzie H5 to poprzednia wartość r , B2 zawiera R w km.

Trzeba tu użyć poprzedniej wartości promienia, by uniknąć odwołania cyklicznego.

Przykładowe rozwiązanie znajduje się w pliku **ObliczanieOrbity2Jezeli.xlsx**.

dt (s)	R (km)	v _x (km/s)	H (km)		v _y (km/s)	G	M (masa)	GM	
30	6378	0	100		0	6,7E-11	5,97E+24	3,98E+14	
t (s)	x (m)	v _x (m/s)	a _x	y (m)	v _y (m/s)	a _y	r (m)	V (m/s)	a (m/s ²)
0	6478000	0	-9,49	0	0	0,00	6478000	0	9,49
30	6473728	-142	-9,51	0	0	0,00	6473728	142	9,51
60	6460901	-428	-9,54	0	0	0,00	6460901	428	9,54
90	6439485	-714	-9,61	0	0	0,00	6439485	714	9,61
120	6409422	-1002	-9,70	0	0	0,00	6409422	1002	9,70
150	6370631	-1293	-9,82	0	0	0,00	6370631	1293	9,82
180		-1587			0		6370631		
210							6370631		

Za duży krok czasowy dt

Wielkość kroku czasowego decyduje o dokładności obliczeń. Zbyt duży krok może doprowadzić do artefaktów, czyli wyników, które przestają obrazować fizykę problemu. Dla orbity kołowej okres obiegu wynosi ok. 85 min. Krok czasowy 60 oznacza 1 minutę i nie powinien być większy. Sprawdzeniem dokładności obliczeń jest np. dwukrotne zmniejszenie kroku czasowego i obejrzenie orbity. Jeśli nie widać różnicy, to krok czasowy jest wystarczająco mały.

Zmiana planety

W arkuszu **UkładSłoneczny2obr.xls** zostały podane masy i promienie wszystkich planet oraz Słońca i Księżyca. Można stamtąd przekopiować je do naszego arkusza i będziemy mieć rozwiązanie np. dla Marsa. Badając wyniki obliczeń można znaleźć prędkość kołową dla Marsa oraz przyspieszenie grawitacyjne na jego powierzchni.

Przykładowe rozwiązanie znajduje się w pliku **ObliczanieOrbity3Mars.xlsx**.

Dostępne zasoby

Arkusze:

1. ObliczanieOrbity.xlsx – numeryczne obliczanie orbity w arkuszu z wykresem (materiały pomocnicze 2)
2. ObliczanieOrbity2Jezeli.xlsx – obliczanie orbity z wykresem i warunkiem $r \geq R$ (materiały pomocnicze 3)
3. ObliczanieOrbity3Mars.xlsx – obliczanie orbity dla satelitów Marsa (materiały pomocnicze 4)
4. UkładSłoneczny2obr.xls – dane na temat planet Układu Słonecznego (materiały pomocnicze 5)





LEKCJA NR 3

TEMAT: Obliczanie orbity w środowisku Khan Academy CS
(lekcja informatyki lub fizyki w pracowni komputerowej)

Streszczenie

Krok po kroku realizujemy omówiony na poprzedniej lekcji algorytm w środowisku Akademii Khana, czyli w języku JavaScript.

Cel

- Umiejętność realizacji algorytmu rozwiązania problemu w języku programowania JavaScript.
- Poznanie przyjaznego dla użytkownika środowiska do nauki programowania.
- Poznanie podstawowych poleceń języka JavaScript.

Słowa kluczowe

JavaScript, Akademia Khana

Co przygotować

- Komputery z dostępem do Internetu
- Zapis algorytmu sformułowany na poprzedniej lekcji
- Nauczyciel powinien przejrzeć gotowe programy pod adresem:
<https://www.khanacademy.org/cs/satelita-wok-ziemi/2397642754>
oraz:
<https://www.khanacademy.org/cs/satelita-wok-ziemi-2/2506442078>
- Pliki (do otwierania w Notatniku): **orbita.js**, **orbita2.js** (materiały pomocnicze 6 i 7)
- Pokaz na zakończenie: **RuchSatelitów.pptx** – prezentacja ruchu satelitów i planet
- Test: **TestObliczanieOrbity.doc**



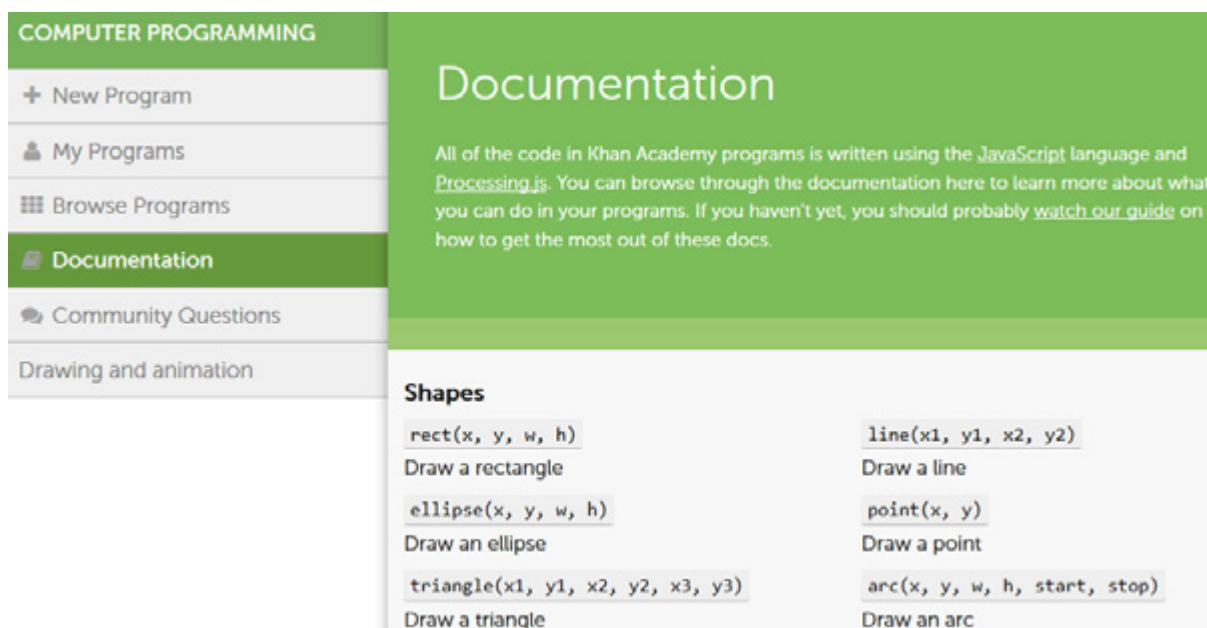
Przebieg zajęć

Nauczyciel przedstawia środowisko Akademii Khana. Następnie przypomina algorytm sformułowany na pierwszej lekcji. Uczniowie zaczynają pracę przy komputerach.

Wprowadzenie (5 minut)

Nauczyciel pokazuje, gdzie można znaleźć dokumentację środowiska (dostępne polecenia):

<https://www.khanacademy.org/cs/program-docs>



Uczniowie dyskutują możliwości zapisania w tym środowisku kolejnych kroków algorytmu.

Praca z komputerem – tworzenie kodu na podstawie algorytmu (30 minut)

1 krok algorytmu – wprowadzenie wartości początkowych.

Położenie początkowe wyznaczone przez:

```
var R = 6378 * 1000;           //promień planety w m (Ziemia)
var WysPocz = 100 * 1000;     //wysokość startu nad powierzchnią w m
var x = R + WysPocz;          //współrzędna x satelity w metrach
var y = 0;                    //współrzędna y satelity w metrach
```

Prędkość początkowa wyznaczona przez:

```
var Vstart = 7.9 * 1000;      //prędkość startowa w m/s
var Kstart = 0;               //kąt startu w stopniach (poziomo do pow. Ziemi 0)
var Vx = Vstart * cos(90-Kstart); //składowe prędkości satelity
var Vy = Vstart * sin(90-Kstart);
```

Dane planety:

```
var M = 5.9745 * pow(10, 24); //masa planety w kg (Ziemia)
var G = 6.673 * pow(10, -11); //stała grawitacji
```

Ustawienie czasu i kroku czasowego:

```
var t=0;
var dt=10;
```

2 krok algorytmu – obliczenie brakujących danych dla $t = 0$

```
var r = sqrt(pow(x,2)+pow(y,2)); //odległość od śr. planety
var Ar = -1 *G * M / pow(r, 2); //prawo pow. ciężenia
var Ax = Ar * x/r; //skł. x przyspieszenia
var Ay = Ar * y/r; //skł. y przyspieszenia
```

3 krok algorytmu – uśrednienie prędkości

```
Vx = Vx + Ax * dt/2;           // prędkość w połowie przedziału czasowego
Vy = Vy + Ay * dt/2;
```




Przygotowania do rysowania, ustalenie układu współrzędnych i narysowanie planety:

Kanwa rysunku ma wielkość 400 * 400 pikseli, punkt początkowy (0, 0) znajduje się w lewym górnym rogu, współrzędne poziome rosną w lewo, a pionowe – w dół. Należy dobrać skalę odpowiednio do wielkości planety

```
var metrNaPiksel = 100000;          //1 piksel = 100 km, promień Ziemi ok. 64 piksele
var srednicaZiemiwPiks = 2 * R / metrNaPiksel;
var Xcentrum = 200;
var Ycentrum = 200;
translate(Xcentrum, Ycentrum); //przesunięcie wsp. aby (0,0) było centrum kanwy
```

Rysowanie planety:

```
background(0, 0, 0); //czarne tło rysowane tylko raz
fill(70, 163, 144); //kolor planety
noStroke(); //bez obwódki
ellipse(0, 0, srednicaZiemiwPiks, srednicaZiemiwPiks); //rysowanie planety
```

Ustalenie koloru punktów, które będą powstawać na torze satelity:

```
stroke(185, 201, 222); //kolor punktów na torze satelity
```

4 krok algorytmu – obliczanie i rysowanie kolejnych położenia satelity w pętli.

Środowisko ma specjalną pętlę, dzięki której można powtarzać obliczenia w nieskończoność. Jest to funkcja draw. Polecenia w niej zawarte są powtarzane bez końca.

```
var draw = function() { //funkcja draw - pętla rysowania
  t = t + dt;           //nowy czas dla następnego kroku
  if (r >= R) {          //satelita ma być na lub nad powierzchnią planety
    x = x + Vx * dt;     //obliczanie nowych współrzędnych x i y
    y = y + Vy * dt;
    r = sqrt(pow(x,2)+pow(y,2));
    Ar = -1 * G * M / pow(r, 2); //przyspieszenie grawitacyjne, minus
                                //oznacza kierunek do //środku planety

    Ax = Ar * x/r;       //skł. x przyspieszenia
    Ay = Ar * y/r;       //skł. y przyspieszenia
    Vx = Vx + Ax * dt;   //nowa prędkość wynikająca z przyspieszenia
    Vy = Vy + Ay * dt;
    point(x/metrNaPiksel, -1 * y/metrNaPiksel); //rysuj piksel w obli-
                                                //czonym punkcie //(-1 bo
                                                //y kanwy w dół)
  } //koniec IF
}; //koniec DRAW
```

Środowisko jest wymagające, ale pomaga poprzez komunikaty o błędach. W oknie kanwy rysunku widać od razu efekty wpisywanych poleceń.

```

* grawitacja (sferycznie symetrycznym).
*****/
var Vstart = 8.1 * 1000; //prędkość startowa w m/s
var Kstart = 0; //kąt startu w stopniach (poziomo 0)
var WysPocz = 100 * 1000; //wysokość startu nad powierzchnią w m

var M = 5.9745 * pow(10, 24); //masa planety w kg (Ziemia)
var R = 6378 * 1000; //promień planety w m (Ziemia)
//Tego nie należy zmieniać chyba, że chcemy zmienić Wszechświat
var G = 6.673 * pow(10, -11); //stała grawitacji

//Gdzie i jak wielka będzie rysowana planeta
var metrNaPiksel = 100000;
var srednicaZiemiwPiks = 2 * R / metrNaPiksel;
var Xcentrum = 200;
var Ycentrum = 200;

```



Praca z komputerem – badanie możliwości programu (10 minut)

Środowisko umożliwia zmianę wszystkich wartości liczbowych poprzez kliknięcie ich i skorzystanie z pojawiającego się suwaka. Daje to sposobność zbadania zależności toru od wartości początkowych. Uczniowie badają te zależności i zapisują wyniki w notatce:

➡ Zależność toru od prędkości początkowej Vstart

Można znaleźć prędkość kołową i próbować wyznaczyć prędkość ucieczki.

➡ Zależność toru od kąta startu Kstart

Można zauważyć, że istotna jest składowa prędkości początkowej równoległa do powierzchni Ziemi.

➡ Zależność toru od wysokości początkowej WysPocz

Można zauważyć, że wartość prędkości kołowej zależy od tej wysokości.

➡ Zależność toru od kroku czasowego dt

Krok czasowy jest podawany w sekundach. Można zaobserwować, że dla dużych wartości kroku (>100) orbita zaczyna się przesuwać, co jest wynikiem błędów numerycznych – symulacja przestaje być wiarygodna.

Problemy (dla zainteresowanych)

Wyświetlanie wartości

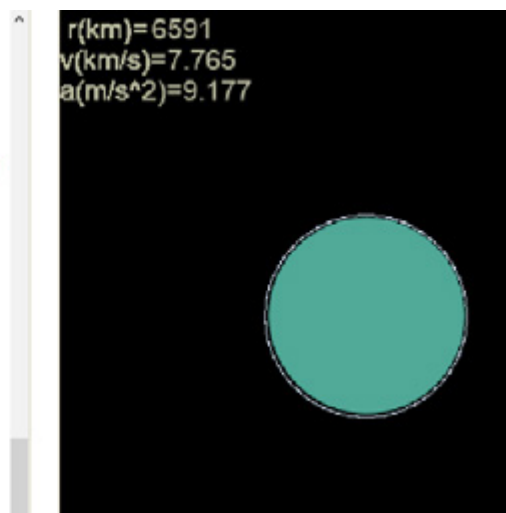
Program pokazuje tor satelity, ale nie widzimy wartości liczbowych. Można je wyświetlić na rysunku posługując się poleceniem text(). Wcześniej trzeba dodać obliczanie wartości prędkości:

```
var V = sqrt(pow(Vx,2)+pow(Vy,2));
```

```

//nowa prędkość wynikająca z przyspieszenia
//i wybranego kroku czasowego
Vx = Vx + Ax * dt;
Vy = Vy + Ay * dt;
var V = sqrt(pow(Vx,2)+pow(Vy,2));
//rysuj piksel w obl. punkcie (-1 bo y rys. w dół)
stroke(185, 201, 222); //kolor punktów na torze satelity
point(x/metrNaPiksel, -1 * y/metrNaPiksel);
//wypisywanie wartości
noStroke(); //wymazywanie poprzednich wartości
fill(0, 0, 0); //czarnym kolorem
rect(-140,-198, 70, 60);
fill(171, 171, 144); //kolor napisów
textSize(18); //rozmiar napisów
text("r(km)=", -195, -180);
text(round(r/1000), -140, -180); //odległość w km
text("v(km/s)=", -200, -160);
text(round(V)/1000, -130, -160); //prędkość w km/s
text("a(m/s^2)=", -200, -140);
text("-1*Ar, -120, -140); //przyspieszenie w m/s^2

```





Inna pętla rysowania

Środowisko oferuje dwie standardowe pętle:

```
while (warunek) { ... }  
for (var i = ..; i < ..; i += ...) { ... }
```

Jednak posiadają one ograniczenia techniczne (nie mogą zawierać zbyt wielu kroków obliczeń). W odróżnieniu od pętli draw obliczenia przebiegają błyskawicznie i można śledzić wyniki dla np. różnych prędkości startowych.

Przykład realizacji algorytmu za pomocą pętli while można obejrzeć w projekcie:

<https://www.khanacademy.org/cs/satelita-wok-ziemi-w/2522916080>

Zmieniając stopniowo prędkość startową, można obejrzeć przejście przez II prędkość kosmiczną (paraboliczną).

Zmiana planety

W arkuszu **UkładSłoneczny2obr.xls** zostały podane masy i promienie wszystkich planet oraz Słońca i Księżyca. Kopiując je stamtąd do danych dla naszego programu będziemy mieć rozwiązanie np. dla Marsa. Jeśli przedtem zaimplementujemy wyświetlanie wartości, to można, obserwując rysowane tory, znaleźć prędkość kołową dla Marsa oraz odczytać przyspieszenie grawitacyjne na jego powierzchni.

Podsumowanie i sprawdzenie wiedzy

Jako pracę domową dla uczniów zainteresowanych lub dla szybciej pracujących w trakcie lekcji można wykorzystać zadania:

- **Ćwiczenie 1:** Opisz w edytorze tekstu wyniki uzyskiwane w arkuszu lub w środowisku Akademii Khana dla różnych danych wejściowych. Porównaj wyniki z teorią poznaną na lekcjach fizyki.
- **Ćwiczenie 2:** Dokonaj zmian w arkuszu i w środowisku Akademii Khana, aby zilustrować ruch satelity wokół Księżyca.
- **Ćwiczenie 3:** Dodaj w programie w środowisku Akademii Khana wyświetlanie wartości odległości satelity, prędkości i przyspieszenia.

Ocenianie

Ocena pracy uczniów może składać się z:

- Oceny arkusza utworzonego przez uczniów w trakcie lekcji. Należy zwrócić uwagę na poprawność obliczeń (2/3), umiejętność sformatowania tabeli i wykresu (1/3).
- Oceny programu wykonanego w środowisku Akademii Khana – poprawność obliczeń (2/3), opis kodu - komentarze (1/3).

Wyników testu sprawdzającego znajdującego się w pliku **TestObliczanieOrbity.doc**.

Dostępne zasoby

Listingi i projekty:

1. orbita.js – listing, numeryczne obliczanie orbity w środowisku processingJS – (materiały pomocnicze 6)
2. orbita2.js – listing, obliczanie orbity w środowisku – (materiały pomocnicze 7)

Prezentacje:

1. RuchSatelitów.pptx – prezentacja ruchu satelitów i planet na podsumowanie



Animacje:

1. orbitaKol.mp4 – prędkość satelity na orbicie kołowej
2. orbitaElip.mp4 – prędkość satelity na wydłużonej orbicie eliptycznej
3. orbityOdV.mp4 – zależność orbity satelity od prędkości początkowej

Zadania:

Zadanie 1 - Zmiana planety

Zadanie 2 - Kształty orbit

Test:

1. TestObliczanieOrbity.doc – 10 pytań testowych

Materiały źródłowe

Numeryczne obliczanie orbity w środowisku processingJS, dostępne na stronie:

<https://www.khanacademy.org/cs/satelita-wok-ziemi/2397642754>.

Obliczanie orbity w środowisku processingJS z wypisywaniem wartości, dostępne na stronie:

<https://www.khanacademy.org/cs/satelita-wok-ziemi-2/2506442078>.

Obliczanie orbity w środowisku processingJS z pętlą **while**, dostępne na stronie:

<https://www.khanacademy.org/cs/satelita-wok-ziemi-w/2522916080>.

Człowiek - najlepsza inwestycja



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA
WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego